

CAŁKI PODWÓJNE

I. Oblicz całkę:

1. $\int_1^e \left[\int_{\ln x}^1 x \, dy \right] dx$

2. $\int_2^4 \left[\int_{1/y}^{\sqrt{y}} (y - 2x) \, dx \right] dy$

3. $\int_1^2 \left[\int_0^y \frac{1}{(1+2y-x)^2} \, dx \right] dy$

4. $\int_0^2 \left[\int_0^{2x} y e^{y-x} \, dy \right] dx$

5. $\int_1^2 \left[\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \right] dx$

6. $\int_0^1 \left[\int_1^{2y} y^2 e^{xy} \, dx \right] dy$

II. Zamień całkę podwójną na iterowaną i ją rozwiąż:

1. $\iint_D \ln x^2 \, dx dy$, gdy obszar D ograniczony jest wykresami zależności
 $y = 0, \quad y = x, \quad x = 1, \quad x = e.$

2. $\iint_D \frac{x^3}{y^2} \, dx dy$, gdy obszar D ograniczony jest wykresami zależności
 $y = x, \quad y = 3x, \quad x = 2.$

3. $\iint_D (x + 6y) \, dx dy$, gdy obszar D ograniczony jest wykresami zależności
 $y = x, \quad y = 5x, \quad x = 1.$

4. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx dy$, $D: \begin{cases} y = x \\ x = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

5. $\iint_D e^x y \, dx dy$, $D: \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ y = x \end{cases}$

$$6. \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x=1, & x=9 \\ y=0, & y=x \end{cases}.$$

III. Korzystając ze współrzędnych biegunowych oblicz całkę podwójną:

$$1. \iint_R \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{gdy obszar } D \text{ ograniczony jest wykresami zależności}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y = x \quad \text{dla } y \geq x;$$

$$2. \iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy, \quad \text{gdy obszar } D \text{ ograniczony jest wykresem zależności}$$

$$x^2 + y^2 = 4;$$

$$3. \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy, \quad \text{gdy obszar } D \text{ wyznaczony jest przez nierówność}$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$4. \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$5. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} y \geq x \\ y \leq \sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases};$$

$$6. \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}.$$

IV. Zastosowania fizyczne:

1. Oblicz masę obszaru D położonego w I ćwiartce układu współrzędnych, ograniczonego wykresem $x^2 + y^2 = 1$, gdy gęstość w punkcie $P(x, y)$ dana jest wzorem $\mu(x, y) = xy$.
2. Oblicz moment bezwładności jednorodnego prostokąta o gęstości μ , bokach a, b , względem punktu przecięcia przekątnych.
3. Oblicz moment bezwładności jednorodnego koła o gęstości μ , promieniu r , względem jego średnicy.
4. Oblicz moment bezwładności względem osi ox jednorodnego obszaru o gęstości μ ograniczonego krzywymi $y = 0$, $y = \cos x$ dla $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
5. Oblicz moment bezwładności względem osi oy trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(-2,2)$, $(2,2)$, gdy gęstość w $P(x, y)$ dana jest wzorem $\mu(x, y) = x + y^2$.