

CAŁKA OZNACZONA

I. Oblicz:

$$1. \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx; \quad I = 1 - 2 \ln 2;$$

$$2. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad I = \frac{\pi a^2}{4};$$

$$3. \int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx; \quad I = e^2 - 1 + \ln \frac{2}{e^2 + 1};$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx; \quad I = 2\sqrt{2} - 2;$$

$$5. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx; \quad I = 2 - \frac{\pi}{2};$$

$$6. \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx; \quad I = \frac{2}{15};$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx; \quad I = 2\sqrt{2} - 2;$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx; \quad I = 1.$$

II. Oblicz pole obszaru ograniczonego liniami:

$$1. y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e; \quad D = 1;$$

$$2. y = x^2, \quad 2x - y + 3 = 0, \quad D = \frac{32}{3};$$

$$3. y = x^2 - 4x + 4, \quad y = x, \quad D = \frac{9}{2};$$

$$4. y^2 = 4x + 4, \quad y = 2 - x, \quad D = \frac{64}{3};$$

$$5. y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x}, \quad D = 4 \ln 2;$$

$$\begin{array}{lll}
6. \quad y = x^2, & y = \frac{x^2}{2}, & y = 3x, & D = \frac{27}{2}; \\
7. \quad y = e^x, & y = e^{-x}, & y = e. & D = 2.
\end{array}$$

III. Oblicz długość łuku krzywej:

$$\begin{array}{lll}
1. \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}; & \text{dla } x \in [0, a], & l = \frac{\pi a}{2}; \\
2. \quad y = \ln x & \text{dla } x \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}], & l = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; \\
3. \quad y = \ln(1 - x^2) & \text{dla } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & l = 2 \ln 3 - 1;
\end{array}$$

IV. a) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi ox :

A. krzywej:

$$\begin{array}{lll}
1. \quad y = \ln x & \text{dla } x \in [1, e], & V = \pi(e - 2); \\
2. \quad y = \sin x & \text{dla } x \in [0, \pi], & V = \frac{\pi^2}{2}; \\
3. \quad y = \sqrt{x + 4} & \text{dla } x \in [-4, -2]; & V = 2\pi.
\end{array}$$

B. figury płaskiej ograniczonej liniami:

$$\begin{array}{lll}
1. \quad y = x^2, & y^2 = x, & V = \frac{3}{10} \pi; \\
2. \quad y^2 = 4 - 2x, & x + y = 2, & V = \frac{4}{3} \pi; \\
3. \quad y^2 = x, & y = \frac{x}{2}, & V = \frac{8}{3} \pi;
\end{array}$$

V. Obliczanie powierzchni bryły obrotowej.

1. Oblicz pole powierzchni torusa.
2. Oblicz pole powierzchni sfery o promieniu R .
3. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi ox krzywej:

$$y = \sqrt{x + 4} \quad \text{dla } x \in [-4, -2]; \quad S = \frac{13\pi}{3}.$$