Politechnika Poznańska
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

Rozprawa doktorska

Tomasz Jankowiak

Kryteria zniszczenia betonu poddanego obciążeniom quasi-statycznym i dynamicznym

Promotor: prof. dr hab. inż. Tomasz Łodygowski

Wydawnictwo
Politechniki Poznańskiej

Recenzenci:
dr hab. inż. Ryszard Sygulski, prof. PP
prof. dr hab. inż. Jacek Tejchman

Projekt okładki
prof. Tadeusz Piskorski

Skład komputerowy i łamanie
Tomasz Jankowiak

Zezwala się na korzystanie na warunkach licencji Creative Commons – uznanie autorstwa – na tych samych warunkach 4.0 (znanej również jako CC-BY-SA) dostępnej pod adresem https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/ lub innej wersji językowej tej licencji, lub którejkolwiek późniejszej wersji tej licencji opublikowanej przez organizację Creative Commons.

ISBN 978-83-7775-796-3 (wersja cyfrowa w otwartym dostępie)

https://doi.org/10.21008/b.978-83-7775-796-3

ISBN 978-83-7143-981-0 (wersja drukowana)

Wydanie I

CC-BY-SA 2025, Tomasz Jankowiak

Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej
60-965 Poznań, pl. M. Skłodowskiej-Curie 2
tel. 61 6653516, faks 61 6653583
e-mail: office_ed@put.poznan.pl, www.wydawnictwo.put.poznan.pl

Spis treści

Dziękuję mojemu Profesorowi Panu Tomaszowi Łodygowskiemu za nieocenioną pomoc, naukę i wsparcie oraz doskonałą atmosferę podczas pisania tej pracy

Dziękuję również Rodzicom za miłość, cierpliwość i wychowanie oraz mojej Ukochanej Basi za to, że JEST

Wprowadzenie

Symulacje komputerowe są niezbędnym elementem projektowania, szczególnie gdy bierze się pod uwagę obciążenia wyjątkowe, które prowadzą do zniszczenia konstrukcji lub jej elementów. Aby przewidzieć realne zachowanie konstrukcji poddanej obciążeniom wyjątkowym, należy zastosować kryterium zniszczenia. Symulacje procesów mechanicznych, które zachodzą w konstrukcjach betonowych, podzielono na dwie zasadnicze części. Pierwsza z nich dotyczy obciążeń quasi-statycznych, druga dynamicznych. Obciążenia wyjątkowe prowadzą do zniszczenia całej konstrukcji i do utraty jej nośności lub do jej uszkodzenia, tzn. do zniszczenia tylko jej części.

W rozdziale 1 przedstawiono wybrane właściwości mechaniczne betonu zwykłego. Prezentacji tej dokonano, ponieważ przedmiotem monografii jest analiza pól mechanicznych. Na podstawie literatury omówiono przede wszystkim wytrzymałość betonu poddanego obciążeniom quasi-statycznym i dynamicznym. Przypomniano sposoby pomiaru wytrzymałości na ściskanie, rozciąganie oraz znane wyniki w dwuosiowym stanie naprężenia. W drugiej części rozdziału 1 określono wytrzymałość betonu przy dynamicznym ściskaniu i rozciąganiu. Przedstawiono również ogólnie testy laboratoryjne, które służą do pomiaru wytrzymałości dynamicznej.

Podstawową przyjętą tutaj metodą obliczeniową jest metoda elementów skończonych, dlatego w rozdziale 2 podano jej sformułowanie ze sposobem rozwiązania problemów quasi-statycznych (metoda Newtona-Raphsona) i dynamicznych (jawna metoda całkowania równań ruchu).

Rozdział 3 zawiera mechaniczną analizę mikrostruktury betonu, wpływającej na jego globalne zachowanie. Celem tej części jest próba określenia właściwości sprężystych betonu wraz z kryterium zniszczenia w płaskim stanie naprężenia. Posłużono się tutaj homogenizacją numeryczną ośrodka losowego. Omówiono dwa sposoby losowania, a mianowicie losowanie jednorodne i losowanie zdeterminowane, które ma na celu odwzorowanie wewnętrznej struktury betonu. Analiza wielkości i kształtu reprezentatywnej objętości (RVE), szczególnie w nawiązaniu do największego kruszywa, jest istotną częścią książki. Wiedza o mikrostrukturze i zjawiskach zachodzących w betonie (jak utrata kohezji czy poślizg) jest niezbędna do analizy zjawisk zachodzących w skali makro.

W rozdziale 4 oprócz wprowadzenia podstawowych wielkości, jak niezmienniki stanu naprężenia i ich energetyczna interpretacja, znalazła się również analiza znanych kryteriów znisz-

czenia materiałów. Usystematyzowanie quasi-statycznych kryteriów zniszczenia jest niezbędne do lepszego zrozumienia korzyści i ograniczeń, jakie płyną z ich użycia. Zamieszczono w nim również interpretację energetyczną wybranych kryteriów oraz kształt omawianych powierzchni w przekroju południkowym, dewiatorowym i w płaskim stanie naprężenia. Przedmiotem rozważań jest również identyfikacja parametrów konstytutywnych na podstawie znanych wartości wytrzymałości betonu. Opis modelu betonu plastycznego z uwzględnieniem zniszczenia oraz dwóch powierzchni: potencjału plastycznego i obciążenia, w którym zastosowano niestowarzyszone prawo płynięcia, podano rozdziale 4. Omówiono sposób identyfikacji czterech podstawowych parametrów konstytutywnych określających obie powierzchnie i opisano ich ewolucję w przestrzeni odkształceń plastycznych. Przykłady obliczeniowe (czteropunktowego zginania belki betonowej z nacięciem oraz czteropunktowego asymetrycznego zginania belki betonowej z nacięciem) weryfikujące identyfikację parametrów są istotne ze względu na praktyczne zastosowanie kryterium. Symulacja zachowania stalowo-betonowego słupa zespolonego, mająca na celu analizę jego nośności na zginanie przy ściskaniu, jest ważnym fragmentem monografii.
Ze względu na dynamiczny charakter niektórych obciążeń, mogących prowadzić do zniszczenia betonu, niezbędne jest uogólnienie omówionych kryteriów w celu uwzględnienia większej wytrzymałości przy obciążeniach dynamicznych. W rozdziale 5 pokazano, jak wytrzymałość dynamiczna zwiększa się w stosunku do wytrzymałości quasi-statycznej przy zastosowaniu kumulatywnego kryterium zniszczenia betonu. Przedstawiono również sposób identyfikacji parametrów modelu i ich wpływ na określenie czasu do zniszczenia betonu. Przytoczono przykłady praktycznego zastosowania kryterium dynamicznego. Pierwszy dotyczy problemu powstawania odprysku w teście dynamicznego rozrywania betonu (test laboratoryjny pozwala określić dynamiczną wytrzymałość na rozciąganie). Drugi dotyczy powstawania odprysku w płycie betonowej obciążonej eksplozją materiału wybuchowego. Wyniki eksperymentalne zaczerpnięto z danych opublikowanych przez Francuską Agencję Energii Atomowej (Gatuingt, Pijaudier-Cabot 2002). Ostatni przykład ma charakter czysto numeryczny, dotyczy symulacji perforacji płyty betonowej i żelbetowej przez sztywny pocisk.
W zakończeniu odniesiono się do szczegółowych celów monografii i podsumowano całość. Cele te są następujące:

- przedstawienie wyników badań eksperymentalnych wytrzymałości betonu zwykłego przy obciążeniach quasi-statycznych i dynamicznych;
- analiza wytrzymałości quasi-statycznej niejednorodnej próbki betonowej z mikrostrukturą losową, prowadząca do określenia kryterium zniszczenia w płaskim stanie naprężenia wraz z identyfikacją parametrów konstytutywnych modelu izotropowego betonu w skali makro;
- analiza wybranych quasi-statycznych kryteriów zniszczenia; identyfikacja parametrów na podstawie testów laboratoryjnych i określenie kształtu powierzchni zniszczenia w przestrzeni niezmienniczej wraz z energetyczną interpretacją;
- opis modelu matematycznego betonu plastycznego uwzględniającego uszkodzenie wraz z weryfikacją tego modelu na podstawie znanych testów eksperymentalnych betonu;

- wprowadzenie dynamicznego kumulatywnego kryterium zniszczenia i identyfikacja parametrów konstytutywnych;
- wyznaczenie wpływu parametrów konstytutywnych i historii obciążenia na określenie czasu do zniszczenia betonu;
- weryfikacja kryterium kumulatywnego zniszczenia na podstawie wybranych testów laboratoryjnych.

Głównym przedmiotem monografii jest opis kryteriów zniszczenia betonu, gdyż stanowią one istotny element programów komputerowych opartych na metodzie elementów skończonych. W nowoczesnych programach obliczeniowych, zawierających wiele skomplikowanych funkcji i zaawansowanych algorytmów (kontakt, efektywne metody rozwiązywania układów równań nieliniowych w przypadku zadań quasi-statycznych i całkowania równań ruchu w dynamice), o tym, czy wirtualny eksperyment da zgodne z rzeczywistością wyniki, decyduje prawidłowy opis materiału. Dlatego istotne jest prawidłowe rozumienie stosowanego w opisie konstytutywnym kryterium zniszczenia i prawidłowa identyfikacja parametrów oparta na wymaganej liczbie testów laboratoryjnych. Temat jest więc aktualny i ważny dla prawidłowego określenia bezpieczeństwa konstrukcji betonowej poddanej obciążeniom wyjątkowym.

Monografia powstała przy wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach grantu N N519 419435 „Ewolucja właściwości oraz kryteria zniszczenia materiałów i konstrukcji przy szybkich obciążeniach dynamicznych”.

1. Wybrane właściwości betonu

Beton jako materiał kompozytowy składa się z kilku elementów składowych: kruszywa, cementu i wody, które po zhydratyzowaniu stanowią sztuczną skałę. Z tego wynika, że struktura betonu jest złożona, co znajduje potwierdzenie w metodach testowania jego właściwości mechanicznych, a mianowicie wytrzymałości i odkształcalności w ściskaniu, rozciąganiu i w złożonym stanie naprężenia. Duża liczba parametrów mieszanki, takich jak: stosunek wody do cementu, stosunek cementu do kruszywa, powierzchnia kruszywa (przyczepność), kształt i wielkość kruszywa, rodzaj cementu i dodatki uszlachetniające, wpływa na właściwości mechaniczne betonu.

Drobne rysy w dojrzałym betonie istnieją na granicy kruszywa i zaprawy nawet w materiale czy konstrukcji nieobciążonej (Chen, Chen 1975 oraz Neville 2000). Mikrorysy są spowodowane rozmieszczeniem komponentów struktury uzyskanym podczas mieszania oraz zjawiskami reologicznymi skurczu i pełzania podczas dojrzewania betonu. Zatem propagacja i ewolucja rys mają zwykle charakter losowy (patrz rozdział 3). Mimo niejednorodnych właściwości struktury beton może być rozważany jako jednorodny, izotropowy ośrodek ciągły (patrz rozdział 4) przed zarysowaniem spowodowanym obciążeniem zewnętrznym, wymaga to jednak odpowiedniej wielkości próbki betonowej w porównaniu z wymiarem kruszywa (Drugan, Willis 1996).

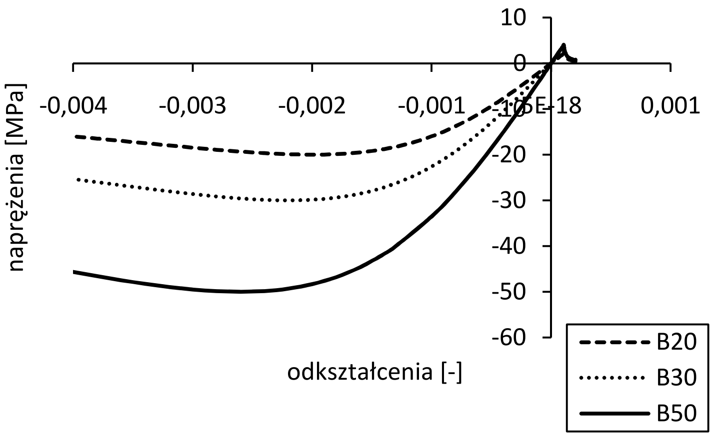
Ważnym, złożonym problemem w nieliniowej analizie zachowania konstrukcji betonowych czy żelbetowych jest przyjęcie odpowiedniego modelu konstytutywnego dla betonu (patrz podrozdział 4.3 i rozdział 5), gdyż beton poddany obciążeniom wyjątkowym, wykraczającym poza granice sprężystego zachowania, pęka, kruszy się i odspaja od zbrojenia. Są to silnie nieliniowe zjawiska, które utrudniają symulację numeryczną jego zachowania. Przyczyną jest właśnie niejednorodność struktury spowodowana kompozytową, złożoną mikrobudową.

1.1. Quasi-statyczne właściwości betonu

Najważniejszą cechą betonu jest wytrzymałość na ściskanie. Wskazuje ona ogólnie na jego jakość oraz budowę wewnętrzną. Poza tym jest również podstawową wielkością używaną w projektowaniu konstrukcji. Wytrzymałość na ściskanie wynika wprost z wytrzymałości zhydratyzowanej zaprawy cementowej (sztywnego cementowego żelu), podstawowego produktu hydratacji. Sztywność i wytrzymałość żelu cementowego wynika z interakcji cząsteczek żelu między sobą oraz z ich oddziaływania z kruszywem i innymi produktami hydratacji cementu (Popovics 1998). Istnieją różne testy wytrzymałościowe betonu, które określają jego wytrzymałość na ściskanie, rozciąganie czy ścinanie. Dynamiczna wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie stanowi odrębną kategorię i jest omawiana dalej (patrz podrozdział 1.2).

Wytrzymałość na ściskanie

Wytrzymałość betonu na ściskanie jest testowana za pomocą prasy hydraulicznej na sześciennych kostkach o długości krawędzi 100, 150 lub 200 mm, specjalnie formowanych lub wycinanych z konstrukcji betonowej. Dopuszczalne są również próbki walcowe o średnicy 150 mm i wysokości 300 mm. Badana próbka jest poddawana działaniu siły ściskającej aż do zniszczenia. Jako wytrzymałość jest oznaczana wartość stosunku maksymalnej siły do aktualnego pola powierzchni ściskanej. Ważny jest zakres obciążeń prasy, gdyż maksymalna siła potrzebna do zniszczenia próbki powinna stanowić minimum 20% i maksimum 90% pełnego zakresu obciążeń prasy. Płyty oporowe o odpowiedniej sztywności powinny zapewniać równomierne przekazywanie obciążenia. Przed badaniem należy określić wymiary próbek z dokładnością do 0,1 mm. Prędkość przyrostu naprężeń ściskających w próbce powinna być stała i wynosić 0,6±0,4 MPa/s.



Rys. 1.1. Wyniki jednoosiowego testu betonu poddanego ściskaniu i rozciąganiu

Istnieje wiele badań zachowania betonu podczas jednoosiowego ściskania. Gdy podane wyżej założenia są spełnione, wyniki eksperymentów są miarodajne i porównywalne. Z wielu prób opisania krzywej naprężenie – odkształcenie za pomocą równania – dobrą korelację z większością wyników wykazuje równanie (Neville 2000):

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}, \qquad 1.1$$

gdzie σ jest naprężeniem, ε odkształceniem, ε_0 odkształceniem odpowiadającym maksymalnemu naprężeniu $\sigma_{\max}$. Przez E oznaczono początkowy, styczny moduł sprężystości, co do którego przyjmuje się, że jego wartością jest podwójna wartość modułu siecznego odpowiadającego maksymalnym naprężeniom $\sigma_{\max}$, czyli

$$E = \frac{2\sigma_{\max}}{\varepsilon_0}. \qquad 1.2$$

Powyższą zależność można przedstawić graficznie (patrz rys. 1.1) dla różnych klas betonu zwykłego (od B20 do B50). Wszystkie wykresy łączy wspólna cecha, którą jest początkowa liniowość w strefie ściskania i rozciągania. Przyjmuje się, że zachowanie betonu jest liniowe do około 60% maksymalnych naprężeń. Powyżej tej granicy wykres ulega zakrzywieniu, tzn. zmienia się współczynnik proporcjonalności E. W granicach od 75% do 90% zakrzywienie wzrasta gwałtownie. Jest to spowodowane coraz większym zniszczeniem struktury wewnętrznej. Krzywa dla wszystkich klas betonu osiąga ekstremum równe wytrzymałości na ściskanie, po czym zaczyna opadać na skutek degradacji, aż do momentu zniszczenia betonu przez pokruszenie.

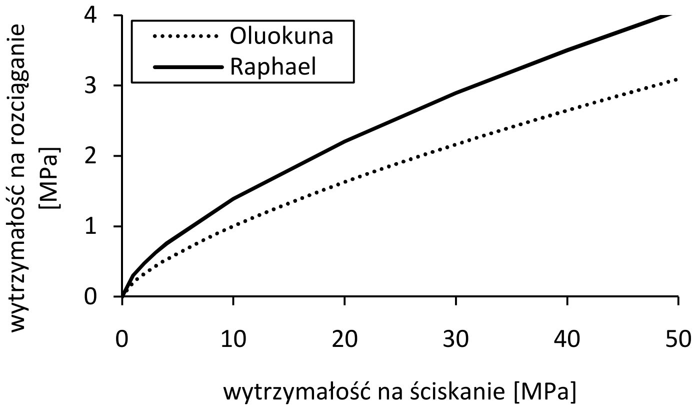
Wytrzymałość na rozciąganie

Rzeczywista wytrzymałość betonu na rozciąganie jest znacznie mniejsza niż wytrzymałość teoretyczna, obliczona na podstawie kohezji molekularnej i energii powierzchniowej ciała doskonale jednorodnego. Teoretyczna wytrzymałość sięga 10,5 GPa (Neville 2000). Wytrzymałość rzeczywista zależy jednak w dużej mierze od przyczepności ziaren kruszywa do stwardniałego zaczynu cementowego. Ze względu na duże zróżnicowanie ziaren kruszywa wyniki tego typu badań wykazują duże odchylenie standardowe i są zależne od kształtu oraz wielkości próbek. Dlatego w praktyce budowlanej wytrzymałość na rozciąganie uzależnia się od wytrzymałości na ściskanie.
Istnieje kilka wzorów empirycznych wiążących wytrzymałość na rozciąganie z wytrzymałością na ściskanie. Najczęściej mają one postać:

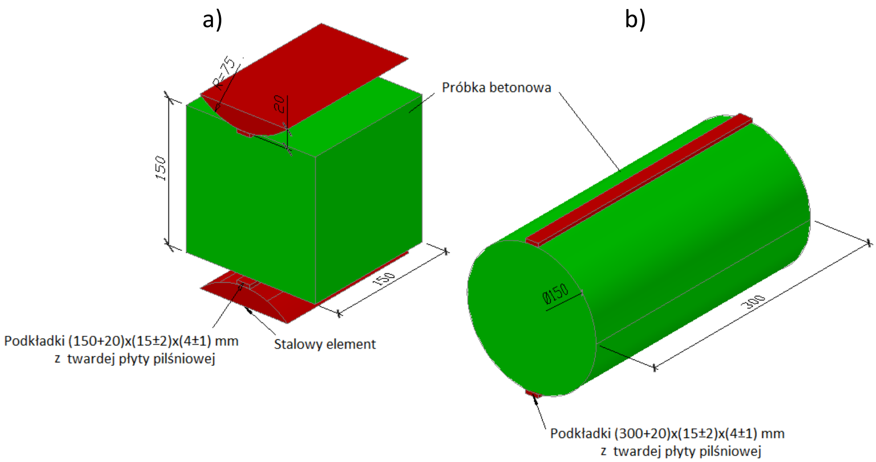
$$f_t = k(f_c)^n, \qquad 1.3$$

gdzie k i n są współczynnikami. Najlepszymi parametrami są $k = 0{,}3$ i $n = 2/3$ (Raphael 1984). Krzywą odpowiadającą tym parametrom przedstawiono na rys. 1.2. W literaturze można znaleźć również inne wartości: $k = 0{,}2$ i $n = 0{,}7$ (Oluokun 1991).
Istnieje możliwość zbadania wytrzymałości betonu na rozciąganie. Najczęściej służą do tego specjalne testy, które prowadzą do rozłupania próbki betonowej podczas jej ściskania. Jedną z nich jest metoda brazylijska, polegająca właśnie na rozłupywaniu próbki betonowej. Schemat tej metody przedstawiono na rys. 1.3. Badaniom poddaje się kostki o boku 150 mm lub walce o średnicy 150 mm i wysokości 300 mm. Przykłada się do nich siłę

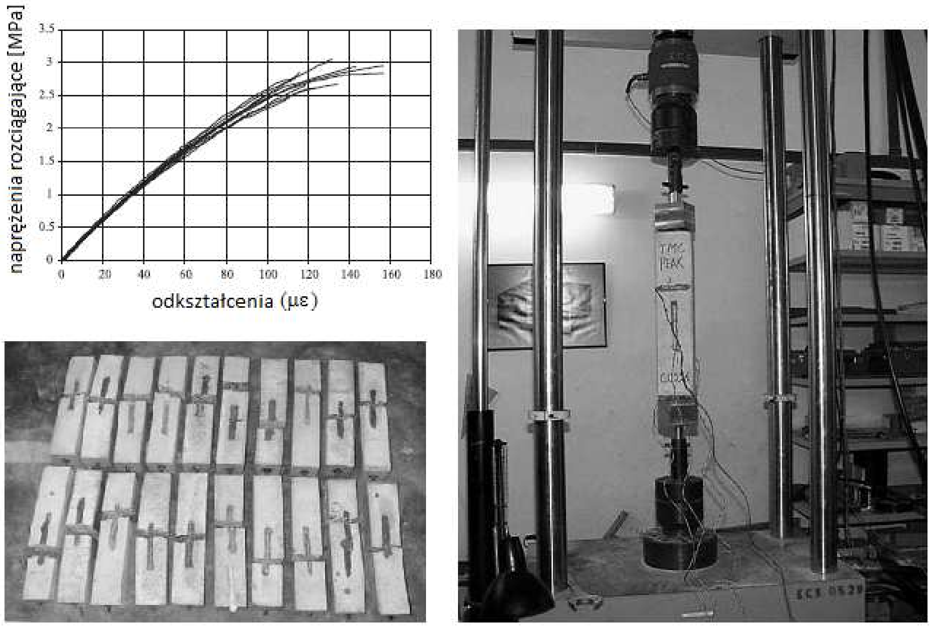
przez podkładki o szerokości $0{,}1d$, gdzie d jest szerokością lub średnicą próbek sześciennych lub walcowych. Podkładki powinny być wykonane z twardej płyty pilśniowej grubości około 4 mm. Próbkę obciąża się siłą ściskającą, wywołując wzrost naprężenia w próbce betonowej z prędkością około 0,06 MPa/s. Test powinien trwać minimum 30 s.
Wytrzymałość próbek na rozciąganie przy rozłupywaniu oblicza się zgodnie ze wzorem: $f_t = 2F/(\pi d^2)$ dla próbek sześciennych i zgodnie ze wzorem: $f_t = 2F/(\pi dl)$ dla próbek walcowych. Prawidłowy obraz zniszczenia próbki w tym badaniu to pęknięcie w płaszczyźnie wyznaczonej liniami przyłożenia siły. Zaleca się badanie minimum 15 próbek, a w celach sondażowych minimum 6.



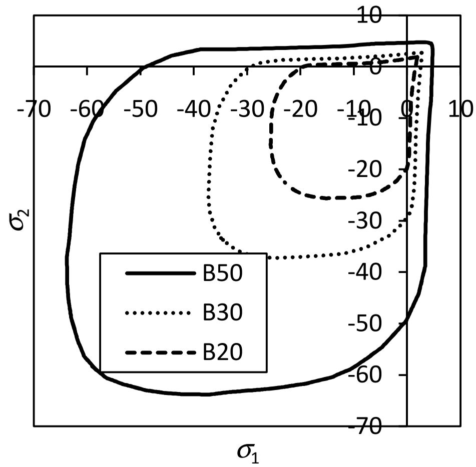
Rys. 1.2. Zależność wytrzymałości na rozciąganie od wytrzymałości na ściskanie (Neville 2000)



Rys. 1.3. Schemat badania próbek sześciennych (a) i walcowych (b) na rozciąganie przy rozłupywaniu



Rys. 1.4. Konfiguracja testu bezpośredniego rozciągania oraz próbki po teście bezpośredniego rozciągania wraz krzywymi eksperymentalnymi naprężenie – odkształcenie (Swaddiwudhiponga, Hai-Rong Lub, Wee 2003)



Rys. 1.5. Krzywe zniszczenia w dwuosiowym stanie naprężenia, gdy końcowe ograniczenia są wyeliminowane (Kupfer, Hilsdo, Rusch, 1969)

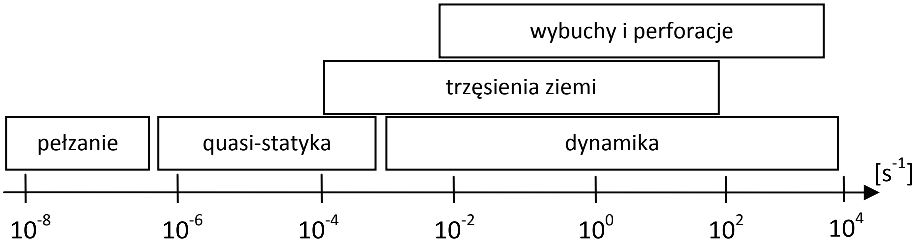
Istnieją również inne metody badania wytrzymałości betonu na rozciąganie, między innymi metoda bezpośrednia (Swaddiwudhiponga, Hai-Rong Lub, Wee 2003). W metodzie tej próbka betonowa jest jednostajnie rozciągana na maszynie wytrzymałościowej Instron. Na rysunku 1.4 przedstawiono mechanizmy zniszczenia próbek betonowych przytwierdzonych do siłowników w taki sposób, by zapobiec wystąpieniu zginania w betonie. Próbki uległy zniszczeniu w okolicach środka przez rozerwanie. Dodatkowo na rysunku przedstawiono wykresy zależności naprężeń rozciągających od odkształceń w różnych testach bezpośredniego rozciągania (Swaddiwudhiponga, Hai-Rong, Wee 2003).

Wytrzymałość betonu w płaskim stanie naprężenia

Zachowanie w płaskim stanie naprężenia jest istotną cechą betonu. Zachowanie betonu w trójosiowym stanie naprężenia (Chen 1982) jest omówione później (patrz rozdział 4). Na rysunku 1.5 przedstawiono krzywe zniszczenia uzyskane w badaniach eksperymentalnych dla trzech przykładowych klas betonu (Kupfer, Hilsdo, Rusch 1969). Na osiach rzędnej i odciętej są naprężenia główne, odpowiednio σ_1 i σ_2. Wzajemna interakcja naprężeń (sprzężenie) jest porównywalna dla różnych klas betonu zwykłego (Kupfer, Hilsdo, Rusch 1969).

1.2. Dynamiczne właściwości betonu

Impulsowe obciążenia konstrukcji w przypadku przekroczenia dynamicznej wytrzymałości betonu powodują ich zniszczenie lub uszkodzenie. Skutek obciążeń dynamicznych bardzo często jest nieprzewidywalny. Na rysunku 1.6 przedstawiono różnego rodzaju obciążenia oraz odpowiadające im zakresy prędkości odkształceń od pełzania przez procesy quasi--statyczne aż do zderzeń, wybuchów czy trzęsień ziemi (procesy dynamiczne). W wyniku obciążenia konstrukcji betonowych falą uderzeniową wywołaną eksplozją materiału wybuchowego dochodzi do dużych prędkości odkształceń, rzędu 1000 1/s.

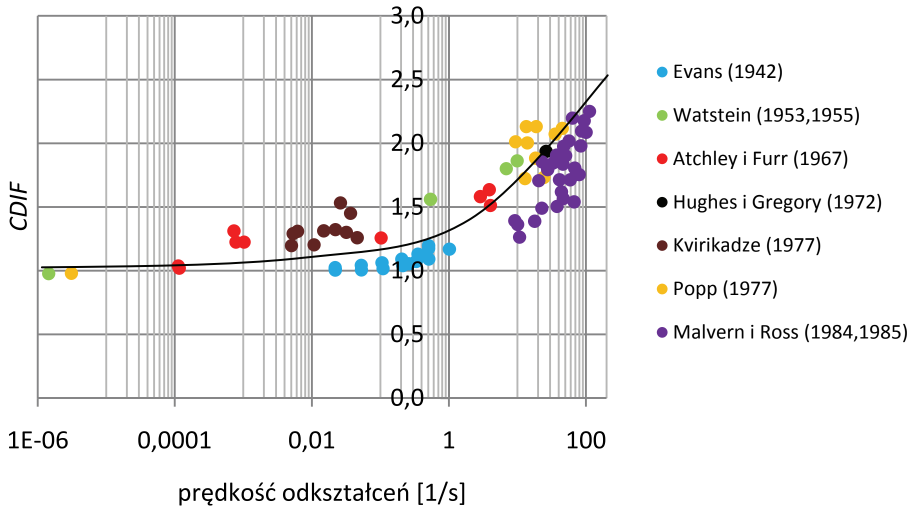


Rys. 1.6. Prędkość odkształceń na skutek różnych obciążeń wyjątkowych

W tej monografii zaprezentowano jedynie symulację procesów quasi-statycznych i dynamicznych, a więc zderzeń i wybuchów. Informacje na temat quasi-statycznych właściwości betonu zarówno ściskanego, jak i rozciąganego oraz w złożonym stanie naprężenia przedstawiono w podrozdziale 1.1. Niżej omówiono wpływ dużych prędkości odkształceń na dynamiczną wytrzymałość przy ściskaniu i rozciąganiu, ponieważ od początku XX wieku wiadomo, że na wytrzymałość betonu zasadniczy wpływ ma prędkość deformacji (Abrams 1917). Wyniki najnowszych badań wielokrotnie to potwierdziły (Klepaczko, Brara 2001; Ross, Tedesco, Kuenen 1992 oraz Bischoff, Perry 1991). Poniżej przedstawiono najważniejsze metody badawcze dynamicznej wytrzymałości betonu oraz poddano analizie wyniki badań eksperymentalnych.

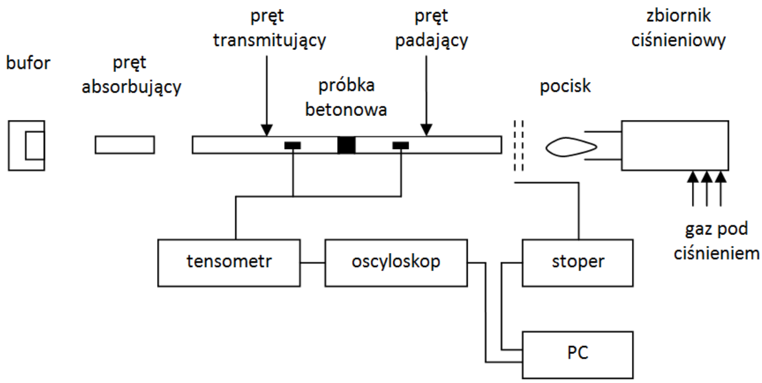
Dynamiczna wytrzymałość na ściskanie

Szczegółową analizę wyników badań dynamicznej wytrzymałości betonu na ściskanie przedstawili w swojej pracy Bischoff i Perry (1991). Na rysunku 1.7 pokazano rezultaty uzyskane przez różnych badaczy analizujących wpływ prędkości odkształceń na dynamiczną wytrzymałość betonu na ściskanie. Na osi odciętych zaznaczono prędkość odkształceń, a na osi rzędnych *CDIF*, czyli współczynnik wzmocnienia wytrzymałości przy ściskaniu (*Compressive Dynamic Increase Factor*). Wartość *CDIF* nieznacznie przekracza 2. Wykres na rys. 1.7 pokazuje ogólną tendencję – wzrost prędkości odkształceń na skutek ściskania powoduje wzrost wytrzymałości dynamicznej betonu. Wyniki badań dynamicznej wytrzymałości na ściskanie w jeszcze większym stopniu zależą od metody badawczej niż wyniki badań quasi-statycznych. Kolejnym powodem różnicy uzyskanych wyników są różne wielkości próbek betonowych i różne materiały (choć zawsze badano beton). Ważne były ja-



Rys. 1.7. Wpływ prędkości odkształceń na *CDIF* (opracowano na podstawie (Bischoff, Perry 1991))

kość betonu, kruszywo, z którego był wykonany, a szczególnie krzywa przesiewowa (Neville 2000), wskazująca na gradację jego ziaren. Zapewne istotny był również sposób zagęszczenia mieszanki betonowej i warunki jej dojrzewania. Poza tym różni badacze używali różnych technik badawczych, co pociągało za sobą różne skutki dynamiczne, np. nieustalony wpływ warunków brzegowych. Należy zatem stwierdzić, że badania, które miałyby służyć do porównania wyników wytrzymałości dynamicznej, należałoby prowadzić kompleksowo i z użyciem tylko jednej zweryfikowanej metody badawczej, np. za pomocą pręta Hopkinsona (*Split Pressure Hopkinson Bar*). Technika ta jest wykorzystywana do określenia wytrzymałości dynamicznej betonu w zakresie prędkości odkształceń od 10 s^{-1} do 1000 s^{-1} (Li, Meng 2003).



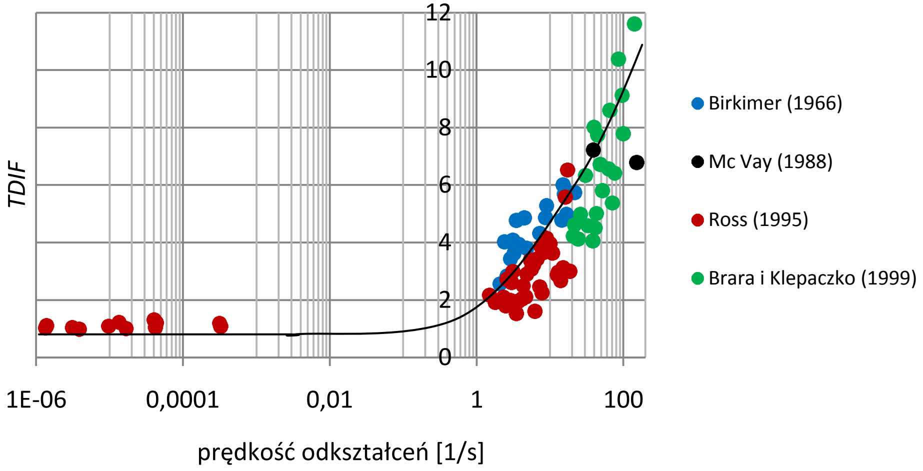
Rys. 1.8. Schemat stanowiska badawczego do określenia dynamicznej wytrzymałości na ściskanie

Przeprowadzenie dynamicznego ściskania próbki betonowej wymaga specjalistycznego oprzyrządowania (patrz rys. 1.8). Pręt Hopkinsona składa się z dwóch prętów: padającego i transmitującego i wklejonej pomiędzy nie próbki betonowej. Osiowa fala ściskająca powstaje w pręcie padającym na skutek uderzenia w niego pocisku wystrzelonego przez lufę ze zbiornika ciśnieniowego. Po uderzeniu pocisku fala ściskająca propaguje się aż do miejsca kontaktu z walcową próbką betonową. W miejscu kontaktu na skutek różnicy charakterystycznej impedancji, która jest cechą obu kontaktujących się materiałów (iloczyn prędkości fali sprężystej i gęstości), część fali zostaje odbita od brzegu, a cześć jest transmitowana do próbki betonowej. Fala odbita powraca jako fala rozciągająca wzdłuż pręta padającego, natomiast fala transmitowana przechodzi do pręta transmitującego. Obie fale, odbita i transmitowana, są mierzone na powierzchni prętów (padającego i transmitującego) w połowie rozpiętości. Omawiana technika wymaga spełnienia dwóch podstawowych założeń: 1) w prętach propaguje się jednowymiarowa sprężysta fala naprężenia, 2) naprężenia i odkształcenia w próbce betonowej są jednoosiowe i równomierne. Pierwszy postulat jest spełniony, gdy ograniczymy się tylko do prędkości pocisku wywołującej falę sprężystą w prętach. Należy również użyć prętów o odpowiedniej geometrii, aby uniknąć zjawiska dyspersji (Bischoff, Perry 1991). Z kolei stan naprężeń i odkształceń w próbce betonowej zależy od promienia próbki, zjawisk bezwładnościowych i ewentualnej rotacji względnej próbki betonowej i pręta oraz tarcia między nimi. Może to spowodować, że założenie drugie nie zostanie spełnione.

Dynamiczna wytrzymałość na rozciąganie

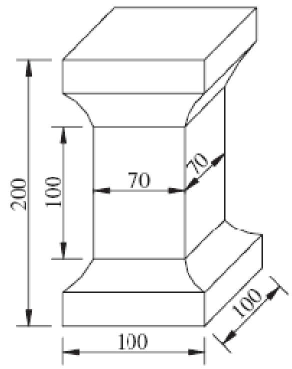
Wyniki wybranych badań eksperymentalnych dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie przedstawiono na rys. 1.9. Na osi odciętych podano prędkość odkształceń, natomiast na osi rzędnych *TDIF*, czyli współczynnik wzmocnienia wytrzymałości przy rozciąganiu (*Tensile Dynamic Increase Factor*). Także wykres na rys. 1.9 pokazuje tendencję wzrostu wytrzymałości dynamicznej wraz ze wzrostem prędkości odkształceń. Podczas dynamicznego rozciągania współczynnik *TDIF* osiąga wartość 12. Wyniki badań są zróżnicowane, ponieważ używano różnych rodzajów betonu, niekiedy o dużej niejednorodności. W nowszych badaniach jako materiał testowy wykorzystywano mikrobeton o wielkości ziaren nieprzekraczającej 2 mm (Klepaczko, Brara 2001). Kolejnym powodem różnych wyników były metody określania wytrzymałości. Stosowano testy bezpośredniego rozciągania (Ross, Tedesco, Kuenen 1992), ale także testy z użyciem pręta Hopkinsona (Klepaczko, Brara 2001 oraz Brara, Klepaczko 2006).

Test bezpośredniego dynamicznego rozciągania może służyć do określenia dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie w zakresie prędkości odkształceń od quasi-statycznych do dynamicznych (maksymalnie 1 s^{-1}). Próbki poddawane obciążeniom quasi-statycznym są o wiele dłuższe (patrz podrozdział 1.2) niż próbki poddawane obciążeniom dynamicznym (Yan, Lin 2006). Na rysunku 1.10 przedstawiono wymiary próbki do określenia dynamicznej wytrzymałości betonu na rozciąganie.



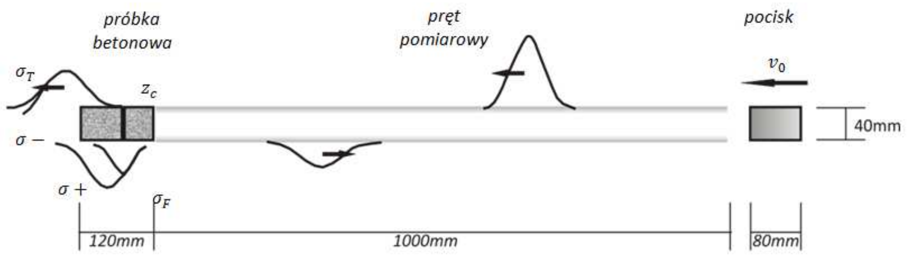
Rys. 1.9. Porównanie różnych wyników badań eksperymentalnych dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie (Brara, Klepaczko 2006)

Badania eksperymentalne dynamicznego ściskania z użyciem pręta Hopkinsona obejmują zakres prędkości odkształceń nawet do 1000 s^{-1} (Bischoff, Perry 1991). W badaniach dynamicznego rozciągania istotne są wyniki z zakresu prędkości odkształceń od 20 s^{-1} do 120 s^{-1} (Klepaczko, Brara 2001 oraz Brara, Klepaczko 2006). Również szeroko jest omawiany problem wpływu wilgotności próbki betonowej na współczynnik wzrostu wytrzymałości podczas dynamicznego rozciągania. Tutaj problem ten nie będzie poruszany, lecz wzrost wilgotności próbki zwiększa *TDIF*. Należy ponadto nadmienić, że wytrzymałość na rozciąganie jest najważniejszą cechą mechaniczną takich quasi-kruchych materiałów jak beton. Niestety, okazuje się, że przeprowadzenie testów dynamicznych jest trudne, gdyż zjawiska falowe w próbce uniemożliwiają określenie wytrzymałości podczas bezpośredniego rozciągania. Należy więc w pełni kontrolować wpływ warunków brzegowych i początkowych, czyli wyeliminować wszelkie źródła niepewności pomiarowej.
Gdy prędkości odkształceń są quasi-statyczne, stosuje się standardowe testy, np. bezpośrednie rozciąganie. Gdy prędkości są większe, niezbędna jest modyfikacja pręta Hopkinsona lub zastosowanie innej techniki badawczej, opartej na generowaniu początkowo w pręcie fali ściskającej przez uderzenie. W końcowym stadium próbka jest niszczona przez rozerwanie spowodowane falą rozciągającą. Stosowano różne techniki badawcze, których zasada działania była zwykle podobna. Pręta Hopkinsona do dynamicznego rozciągania pierwsi użyli naukowcy z University of Delf (Kormeling, Zielinski, Reinhardt 1980). Swoje badania prowadzili na próbkach betonowych o dużej średnicy, wklejonych pomiędzy dwa pręty. Fala ściskająca była generowana przez uderzenie w taki układ trzeciego pręta. Stosowano również inne techniki badawcze, a w szczególności mniejsze wymiary próbek: średnica wynosiła 74 mm, a długość 100 mm (Zielinski 1982). Przeprowadzono serię testów z prędkością odkształceń dochodzącą do 5 s^{-1}. Ogólnie dla różnych klas betonu osiągano wartość współczynnika *TDIF* równą 2. Kolejną techniką badawczą określania dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie było użycie dwóch prętów, pomiędzy które wstawiono walcową próbkę betonową w taki sposób, że jej oś była prostopadła do osi prętów. Podczas dynamicznego zgniatania próbka ulega zniszczeniu przez rozerwanie (Ross, Thompson, Tedesco 1989). Jest to test odpowiadający quasi-statycznemu zgniataniu próbki walcowej. Stosowano pręty o średnicy około 75 mm. Fala ściskająca była generowana przez uderzenie pocisku w jeden z prętów. Założono, że rozkład naprężeń w próbce betonowej jest quasi-statyczny. Stosowano również próbki betonowe o różnych średnicach – od 19 do 51 mm i długości 45 mm (Ross, Thompson, Tedesco 1989). Autorzy uwzględniali różną prędkość pocisków wywołujących w próbce prędkości odkształceń z zakresu od 10^{-7} s^{-1} do 20 s^{-1}. Osiągnęli dość znaczne wartości współczynnika *TDIF*, dochodzące do około 6, odpowiadające prędkości odkształcenia 18 s^{-1}.



Rys. 1.10. Geometria i wymiary próbki betonowej

Prowadzono również eksperymenty na mniejszych próbkach betonowych – o długości 6,4 mm i 12,7 mm i średnicy od 12,7 mm do 50,8 mm. W tym przypadku określono wartość współczynnika *TDIF* równą około 4,8 dla prędkości odkształceń około 70 s^{-1} (John, Antoun, Rajendran 1992). Inne eksperymenty, w których określano wytrzymałość dynamiczną betonu na rozciąganie, polegały na wywołaniu w długiej próbce betonowej fali ściskającej przez eksplozję materiału wybuchowego. Fala ściskająca obijała się od swobodnej powierzchni i rozrywała próbkę w wyniku dynamicznego rozciągania. Do eksperymentów przeprowadzonych przez Londona i Quineya w 1923 roku nawiązywali między innymi Klepaczko i Brara (Brara, Klepaczko 2006). Podobne eksperymenty (fala ściskająca była wywoływana przez uderzenie stalowych kul) wykonywał Goldsmith (1966). Eksperymenty z użyciem pistoletu gazowego prowadzili Mellinger i Birkimer (1966). Uzyskali oni współczynniki *TDIF* równe od 5,8 do 6,3 dla prędkości odkształceń od 20 s^{-1} do 30 s^{-1}.



Rys. 1.11. Schemat działania pręta Hopkinsona

Brara (1999) w pracy doktorskiej przedstawił dokładnie nową technikę badawczą służącą do określenia dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie. Technika ta łączy zjawisko propagacji fali w pręcie Hopkinsona z powstawaniem odprysku w betonowej próbce. Mimo ograniczeń metody (średnica pręta pomiarowego, wymiary próbki betonowej i analiza zjawisk falowych zachodzących w próbce betonowej), które są szeroko omówione w literaturze (Brara, Klepaczko 2006) jest ona z powodzeniem stosowana. Na schemacie na rys. 1.11 pokazano podstawowe elementy pręta Hopkinsona, czyli pocisk, pręt pomiarowy oraz walcową próbkę betonową, wszystkie o średnicy 40 mm. Aluminiowy pocisk jest wystrzeliwany za pomocą pistoletu gazowego i naprowadzany na aluminiowy pręt pomiarowy za pomocą precyzyjnej lufy. Aluminium, z którego są wykonane elementy układu, ma impedancję zbliżoną do impedancji betonu. Tą metodą osiągnięto prędkości odkształceń w próbce betonowej od 20 s^{-1} do 120 s^{-1}, odpowiadają im zmierzone wartości współczynnika *TDIF* z zakresu od 4 do 12 (patrz rys. 1.9).

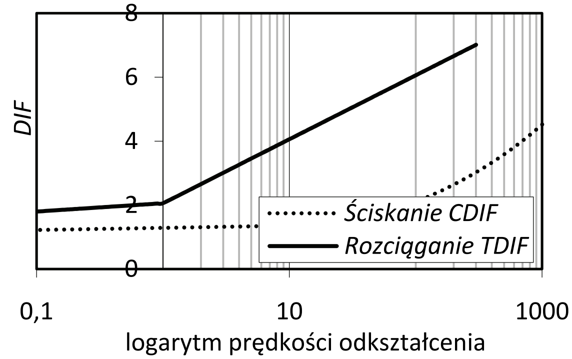
Podejście normowe

Comité Euro-international du Béton (CEB) zaleca stosowanie tzw. dynamicznego współczynnika wytrzymałości w obu przypadkach obciążeń (ściskanie i rozciąganie). Współczyn-

nik ten określa, ile razy dynamiczna wytrzymałość jest większa niż quasi-statyczna. Szczególnie ważny dla materiałów kruchych, takich jak beton, jest *TDIF*, gdyż nagłe rozciąganie jest najczęstszą przyczyną zniszczenia, szczególnie pod wpływem nagłych obciążeń, takich jak wybuchy (Jankowiak, Łodygowski, Sielicki 2007).
Równanie empiryczne zalecane przez CEB do określania *CDIF* ma postać:

$$CDIF = \frac{f_{cd}}{f_{cs}} = \begin{cases} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_d}{\dot{\varepsilon}_{cs}}\right)^{1{,}026\alpha} & \text{dla } \dot{\varepsilon}_d \le 30\ \mathrm{s}^{-1} \\ \gamma\left(\frac{\dot{\varepsilon}_d}{\dot{\varepsilon}_{cs}}\right)^{1/3} & \text{dla } \dot{\varepsilon}_d > 30\ \mathrm{s}^{-1} \end{cases}, \qquad 1.4$$

gdzie f_{cd} jest dynamiczną wytrzymałością na ściskanie dla prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_d$. Z kolei $\dot{\varepsilon}_{cs} = 0{,}00003\ \mathrm{s}^{-1}$ i odpowiada statycznej wytrzymałości na ściskanie f_{cs}. Parametry γ, α są zdefiniowane przez CEB jako $\lg \gamma = 6{,}156\alpha - 0{,}49$ oraz $\alpha = (5 + 3f_{cu}/4)^{-1}$, gdzie f_{cu} jest wytrzymałością na ściskanie określaną na próbkach walcowych. Wartości obliczone z równania 1.4 dla prędkości odkształceń większych niż $30\ \mathrm{s}^{-1}$ odpowiadają wynikom przedstawionym na rys. 1.7 (Bischoff, Perry 1991 oraz Malvern, Ross 1985).



Rys. 1.12. Współczynnik DIF jako funkcja logarytmu prędkości odkształcenia dla obu przypadków (rozciąganie *TDIF* i ściskanie *DIF*) obciążenia (CEB 1987)

Jak już wspomniano, dominującą rolę w dynamicznym zniszczeniu betonu odgrywa *TDIF*, który został wyznaczony na podstawie wielu eksperymentów opisanych w literaturze (Nowacki, Klepaczko 2001 oraz Weerheijma, Van Doormaalb, 2007). Jednak ostatnie badania (Brara, Klepaczko 2006) dowodzą, że *TDIF* określony przez CEB jest niedoszacowany, tzn. ma zbyt małe wartości (około 6) dla prędkości odkształceń rzędu $100\ \mathrm{s}^{-1}$. W niektórych badaniach (Brara, Klepaczko 2006) wyznacza się wartość *TDIF* równą około 10. Zgodnie z CEB, *TDIF* opisuje następujące równanie:

$$TDIF = \frac{f_{td}}{f_{ts}} = \begin{cases} 1{,}0 & \text{dla} & \dot{\varepsilon}_d \le 10\ \mathrm{s}^{-4} \\ 2{,}06 + 0{,}26 \lg \dot{\varepsilon}_d & \text{dla} & 10\ \mathrm{s}^{-4} < \dot{\varepsilon}_d \le 1\ \mathrm{s}^{-1}, \\ 2{,}06 + 2 \lg \dot{\varepsilon}_d & \text{dla} & 1\ \mathrm{s}^{-1} < \dot{\varepsilon}_d \end{cases} \qquad 1.5$$

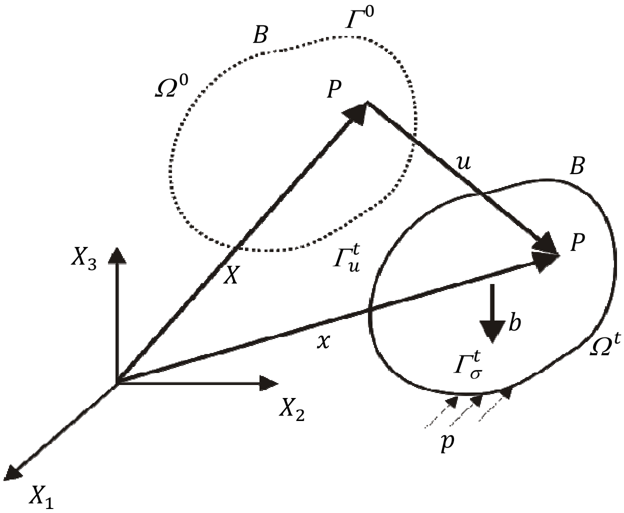
gdzie f_{td} jest dynamiczną wytrzymałością betonu na rozciąganie dla prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_d$. Równanie może być rozszerzone do $1000\ \mathrm{s}^{-1}$ (Klepaczko 1990). Poza tą granicą prędkości odkształceń wartość *TDIF* przyjmuje się stałą, aby zapobiec przeszacowaniu.

2. Metoda elementów skończonych

Ze względu na złożoność zagadnień mechaniki betonu i nieliniowość problemu w niniejszej monografii posłużono się metodą elementów skończonych. Istnieje wiele opracowań opisujących tę metodę (Zienkiewicz, Taylor 2000; Crisfield 1991 oraz Belytschko, Liu, Moran 2000). Wszystkie obliczenia prezentowane w tej książce zostały wykonane w programach Abaqus/Standard lub Abaqus/Explicit. Pierwszy program posłużył do symulacji quasi--statycznych problemów obliczeniowych, drugi do dynamicznych. Oba komercyjne programy pozwalają na uwzględnienie wszystkich omawianych zjawisk nieliniowych, które wpływają zarówno jakościowo, jak i ilościowo na wyniki. Istnieje kilka podstawowych źródeł nieliniowości, między innymi nieliniowość fizyczna, geometryczna czy wynikająca ze zmiennych w procesie warunków brzegowych. Tutaj skupiono się na nieliniowości fizycznej w betonie. We wszystkich analizach numerycznych uwzględniono ponadto nieliniowość geometryczną związaną z dużymi deformacjami. Wzięto również pod uwagę nieliniowość warunków brzegowych związaną z oddziaływaniem kontaktowym. Ze względu na rozważane tutaj kryteria zniszczenia materiałów kruchych szczegółowo omówiono je w kolejnych rozdziałach.

W tym rozdziale wyprowadzono równanie równowagi dla procesów stacjonarnych i niestacjonarnych oraz podstawowe równanie metody elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej (Rojek 2007) dla zagadnień quasi-statycznych (rozwiązywane w programie Abaqus/Standard) oraz dla zagadnień dynamicznych (rozwiązywane w programie Abaqus/Explicit).

Rozważa się ruch ciała stałego B (Rymarz 1993), które podlega odkształceniu od chwili $t = 0$ do chwili $t = T$. Rozpatrywany ruch zachodzi w przestrzeni euklidesowej $E^{n_{sd}}$, która we wszystkich rozważanych tutaj przypadkach ma wymiar dwa E^2 lub trzy E^3. W przestrzeni tej wprowadzono kartezjański układ współrzędnych o wersorach e_i dla $i = 1..n_{sd}$. Ciało B w chwili $t \in [0, T]$ zajmuje obszar $\left(\Omega^t \cup \Gamma^t\right) \subset E^{n_{sd}}$, gdzie Γ^t jest brzegiem obszaru Ω^t. Na ciało B działają siły objętościowe b i powierzchniowe p na części brzegu Γ_σ^t. Na innej części brzegu Γ_u^t przyłożono kinematyczne warunki brzegowe. Zakłada się również, że oba obszary nie mają części wspólnej oraz że w sumie stanowią cały brzeg Γ^t (oznaczenia z rys. 2.1).



Rys. 2.1. Deformacja ciała B w czasie

Współrzędne kartezjańskie punktów materialnych w konfiguracji początkowej odpowiadającej chwili $t = 0$ oznaczono jako X, zgodnie ze wzorem:

$$X = X_i e_i, X \in \overline{\Omega}^0. \tag{2.1}$$

Współrzędne punktów materialnych w aktualnej konfiguracji oznaczono przez x:

$$x = x_i e_i, x \in \overline{\Omega}^t. \tag{2.2}$$

Kreski nad Ω oznaczają sumę Ω i Γ w określonej konfiguracji (początkowej z indeksem górnym 0 oraz aktualnej z indeksem górnym t).
Podstawowe pojęcia i definicje w zakresie potrzebnym do wprowadzenia dyskretnych równań metody elementów skończonych znajdują się literaturze przedmiotu (Crisfield 1991, Zienkiewicz, Taylor 2000 oraz Belytschko, Liu, Moran 2000). W niniejszym rozdziale wyprowadzono równanie MES dla opisu materialnego z aktualną konfiguracją odkształconą jako konfiguracją odniesienia, zwaną uaktualnionym opisem Lagrange'a. Ruch opisano przez odwzorowanie $x(X, t)$. W tej sytuacji pole przemieszczeń zdefiniowano w następujący sposób:

$$u(X, t) = x(X, t) - X. \tag{2.3}$$

Pola prędkości i przyspieszenia są odpowiednimi pochodnymi materialnymi. I tak, prędkość to

$$v(X, t) = \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} = \dot{u}, \tag{2.4}$$

a przyspieszenie to

$$a(X, t) = \frac{\partial v(X, t)}{\partial t} = \dot{v}. \tag{2.5}$$

Poszukiwane rozwiązanie powinno spełniać układ równań różniczkowych 2.6:

$$\begin{gathered}\text{zasada zachowania masy:}\\ \rho(X,t)\cdot J(X,t)=\rho_0(X),\text{gdzie } X\in\bar{\Omega}^0 i\ t\in[0,T],\\ \text{równanie ruchu (zasada d'Alemberta):}\\ \nabla\cdot\sigma+\rho b=\rho a,\text{gdzie } X\in\Omega^t i\ t\in[0,T],\\ \text{naprężeniowe warunki brzegowe:}\\ n\cdot\sigma=t,\ x\in\Gamma_\sigma^t, t\in[0,T],\\ \text{przemieszczeniowe warunki brzegowe:}\\ u=\bar{u},\ x\in\Gamma_u^t, t\in[0,T],\\ \text{warunki początkowe:}\\ u=u_0, v=v_0, X\in\bar{\Omega}^0, t=0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

W układzie tym ρ jest gęstością masy, J wyznacznikiem tensora gradientu deformacji, σ tensorem Cauchy'ego, n wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni Γ_σ. Rozwiązaniem układu równań 2.6 jest pole przemieszczeń $u=u(X,t)$. Dodatkowym elementem, bez którego nie można rozwiązać tego układu, jest prawo konstytutywne, które pozwala wyznaczyć pole naprężeń $\sigma(X,t)$. Szerzej równania konstytutywne wraz z powierzchniami zniszczenia, które określają zachowanie materiału, są przedstawione w kolejnych rozdziałach. Stanowią one istotny element monografii.
W przytoczonych przykładach obliczeniowych znalezienie analitycznego zamkniętego rozwiązania układu równań 2.6 nie jest możliwe. Dlatego rozwiązano je w sposób przybliżony, posługując się metodą elementów skończonych. Przyjęto tutaj tzw. sformułowanie słabe metody elementów skończonych, gdyż warunki równowagi są spełnione w pewien uśredniony sposób, nie w każdym punkcie, lecz tylko w skończonej liczbie punktów, stanowiących węzły elementów skończonych.

2.1. Sformułowanie słabe metody elementów skończonych

Równanie równowagi dynamicznej i statycznej dla problemów nieliniowych wyprowadzono, wychodząc od problemu liniowego. Sformułowanie słabe ma w tym przypadku postać:

$$\int_{\Omega^t}\sigma:\delta\varepsilon\ d\Omega=\int_{\Omega^t}\rho(b-a)\cdot\delta u\ d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma^t}t\cdot\delta u\ d\Gamma. \tag{2.7}$$

W równaniu tym u jest dowolnym kinematycznie dopuszczalnym polem przemieszczeń, δu jest jego wariacją (pole wirtualnego przemieszczenia), a $\delta\varepsilon$ wariacją tensora odkształ-

ceń odpowiadającą δu. Równanie 2.7 stanowi warunek równowagi dynamicznej prac wirtualnych sił wewnętrznych i zewnętrznych. Dodatkowo w równaniu 2.7 należy uwzględnić warunki brzegowe (przemieszczeniowe) przez założenie kinematycznej dopuszczalności pola wirtualnego przemieszczenia oraz warunki naprężeniowe przez dołączenie członu związanego z pracą wirtualną obciążenia na brzegu.
Równanie prac wirtualnych może być punktem wyjścia do wyprowadzenia ogólnego równania metody elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej dla zagadnień dynamicznych, a następnie quasi-statycznych. W notacji macierzowej warunek równowagi prac wirtualnych przedstawiono w następujący sposób:

$$\int_{\Omega^t} \delta u^T \rho \ddot{u}\, d\Omega + \int_{\Omega^t} \delta\varepsilon^T \sigma\, d\Omega - \int_{\Omega^t} \delta u^T \rho b\ d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^t} \delta u^T t\ d\Gamma = 0. \qquad 2.8$$

W równaniu tym σ i ε są wektorami naprężeń Cauchy'ego i małych odkształceń lub inną parą sprzężonych (adekwatnych energetycznie) miar naprężeń i odkształceń. Ich składowe można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}\}^T, \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}\}^T. \end{aligned} \qquad 2.9$$

Objętość Ω podzielono na n_{el} niepokrywających się elementów skończonych, zgodnie ze wzorem:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=n_{el}} \Omega_i, \qquad 2.10$$

oraz założono kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń w postaci:

$$u(x) = N(x)\, r_e, x \in \Omega_e. \qquad 2.11$$

W równaniu 2.11 $N(x)$ stanowi macierz funkcji interpolujących (funkcji kształtu) pole przemieszczeń wewnątrz elementów skończonych, a r_e jest wektorem uogólnionych parametrów węzłowych. W przytoczonych tutaj przykładach obliczeniowych są to przemieszczenia. Funkcje kształtu zapewniają kinematyczną dopuszczalność pola przemieszczeń oraz ciągłość pola przemieszczeń dla dowolnych wartości parametrów węzłowych. Wariację kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń $\delta u(x)$ określono następującą zależnością:

$$\delta u(x) = N(\mathrm{x})\, \delta r_e, x \in \Omega_e. \qquad 2.12$$

Związek pomiędzy odkształceniami ε a przemieszczeniami u w notacji macierzowej przedstawić można w następujący sposób:

$$\varepsilon = L\, u, \qquad 2.13$$

gdzie L jest operatorem różniczkowym w postaci:

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \end{bmatrix}. \qquad 2.14$$

Wariacja odkształcenia $\delta\varepsilon$ w tym przypadku ma postać:

$$\delta\varepsilon = L\,N\,\delta r_e = B\,\delta r_e, x \in \Omega_e. \qquad 2.15$$

Po podstawieniu zależności 2.10 – 2.15 do równania 2.8, równowagę prac wirtualnych dla układu dyskretnego można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta r_e)^T \left(\int_{\Omega_e} \rho N^T N \, d\Omega_e \right) \ddot{r}_e + \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta r_e)^T \left(\int_{\Omega_e} B^T \sigma \, d\Omega_e \right) - \\ &- \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta r_e)^T \left(\int_{\Omega_e} N^T \rho b \, d\Omega_e \right) - \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta r_e)^T \left(\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} N^T t \, d\Gamma_e \right) = 0. \end{aligned} \qquad 2.16$$

Równanie 2.16 uproszczono do następującej postaci:

$$(\delta r)^T (M\ddot{r} + F^{\mathrm{wew}} - F^{\mathrm{zew}}) = 0. \qquad 2.17$$

W równaniu 2.17 wprowadzono globalną macierz mas M, globalny wektor uogólnionych przemieszczeń węzłów elementów skończonych r_e i uogólnionych przyspieszeń tych węzłów $\ddot{r}_e$. Poza tym przez F^{wew} i F^{zew} oznaczono siły węzłowe odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne. Globalne macierze i wektory otrzymuje się w wyniku agregacji odpowiednich członów pochodzących od pojedynczych elementów skończonych, zgodnie z zależnością:

$$r = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} r_e \,, F^{\mathrm{wew}} = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} f_e^{\mathrm{wew}} \,, F^{\mathrm{zew}} = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} f_e^{\mathrm{zew}} \,, M = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} m_e. \qquad 2.18$$

We wzorach 2.18 $\bigwedge$ oznacza operator agregacji globalnych wektorów i macierzy. Należy także określić sposób obliczania wektorów i macierzy dla konkretnych elementów skończonych. I tak, elementowy wektor sił wewnętrznych wywołanych naprężeniami wyrażono następującym wzorem:

$$f_e^{\mathrm{wew}} = \int_{\Omega_e} B^T \sigma \, d\Omega_e, \qquad 2.19$$

w którym wektor sił zewnętrznych działających na element skończony określono jako:

$$f_e^{\mathrm{zew}} = \int_{\Omega_e} N^T \rho b \, d\Omega_e + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} N^T t \, d\Gamma_e, \qquad 2.20$$

a macierz mas elementu skończonego to

$$m_e = \int_{\Omega_e} \rho N^T N \, d\Omega_e. \quad 2.21$$

Skalarne równanie 2.17 jest spełnione dla dowolnej wariacji przemieszczeń węzłowych, dlatego drugi człon iloczynu równy jest zeru, co zapisano w postaci następującego układu równań:

$$M\ddot{r} + F^{\mathrm{wew}} - F^{\mathrm{zew}} = 0. \quad 2.22$$

Układ równań 2.22 jest ogólny i opisuje dynamiczne zachowanie dowolnego układu oraz zawiera wszelkie możliwe źródła nieliniowości. Jeśli siły zewnętrzne nie zmieniają się w czasie lub zmieniają się tylko co do wartości w sposób monotoniczny oraz siły bezwładności są małe, to w układzie równań 2.22 można pominąć wszelkie siły dynamiczne (bezwładności i tłumienia). Wtedy przyjmuje on postać:

$$F^{\mathrm{wew}} - F^{\mathrm{zew}} = 0. \quad 2.23$$

Do układu równań 2.22 można wprowadzić również w sposób jawny siły tłumienia:

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + F^{\mathrm{wew}} - F^{\mathrm{zew}} = 0, \quad 2.24$$

gdzie C jest macierzą tłumienia. W przypadku założenia tłumienia Rayleigha przyjęto, że macierz C jest proporcjonalna do macierzy mas M i do macierzy sztywności K:

$$C = \alpha K + \beta M. \quad 2.25$$

Gdy stosuje się jawną metodę całkowania równań ruchu, macierz K nie jest obliczana wprost, jednak można uwzględnić tłumienie Rayleigha za pomocą następującego przybliżenia macierzy sztywności K:

$$K = \frac{\partial F^{\mathrm{wew}}}{\partial r} \approx \frac{\Delta F^{\mathrm{wew}}}{\Delta r}. \quad 2.26$$

Wyżej podano sposób dyskretyzacji równań ruchu w czasie oraz sposób, za pomocą którego możliwe jest przejście od problemu dynamicznego do statycznego. Rozwiązaniem zagadnienia dynamiki opisanego równaniem 2.24, po uwzględnieniu odpowiednich warunków początkowo-brzegowych, jest jego całkowanie względem czasu, które odbywa się w sposób przyrostowy. Aktualne konfiguracje są wyznaczane w kolejnych chwilach $t_1, t_2, \dots t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots T$, gdzie ogólnie $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ (Δt_n jest długością n-tego kroku całkowania).

2.2. Niejawna metoda całkowania równań ruchu

Przedstawienie teoretycznych podstaw całkowania równań ruchu rozpoczęto od niejawnej metody całkowania, która po wprowadzeniu odpowiednich uproszczeń prowadzi do rozwiązania równań statyki.

Wprowadzono zatem niejawny schemat całkowania równań ruchu, w którym zapisano układ równań 2.22 dla nieznanej konfiguracji aktualnej w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

$$M\ddot{r}_{n+1} + C\dot{r}_{n+1} + F_{n+1}^{\mathrm{wew}} - F_{n+1}^{\mathrm{zew}} = 0. \qquad 2.27$$

Jednocześnie założono, że znane jest rozwiązanie w chwili poprzedniej t_n. Trzeci człon układu równań 2.27 jest zależny od poszukiwanego rozwiązania, więc

$$F_{n+1}^{\mathrm{wew}} = F_{n+1}^{\mathrm{wew}}(r_{n+1}, \sigma_{n+1}). \qquad 2.28$$

Zastosowanie niejawnego schematu całkowania równań ruchu wymaga wykorzystania odpowiedniej procedury iteracyjnej do rozwiązania układu równań nieliniowych:

$$M\ddot{r}_{n+1}^{(k+1)} + C\dot{r}_{n+1}^{(k+1)} + F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k+1)}, \sigma_{n+1}^{(k+1)}\right) - F_{n+1}^{\mathrm{zew}} = 0. \qquad 2.29$$

W tym układzie równań indeksy górne przy wektorach uogólnionych przemieszczeń węzłowych oznaczają kolejne iteracje. Aby rozwiązać układ równań 2.29 w programie Abaqus/Standard, zastosowano procedurę iteracyjno-przyrostową, opartą na metodzie Newtona-Raphsona. Stosując tę metodę, założono, że znane jest rozwiązanie dla poprzedniej konfiguracji, tzn. dla $r_{n+1}^{(k)}$. Linearyzacja wektora sił wewnętrznych wokół tego punktu (rozwinięcie w szereg Taylora wraz z pominięciem wyrazów wyższego rzędu) prowadzi do następującej zależności:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k+1)}, \sigma_{n+1}^{(k+1)}\right) &= F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{n+1}^{(k)}\right) + \frac{\partial F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{n+1}^{(k)}\right)}{\partial r_{n+1}^{(k)}} \delta r_{n+1}^{(k)} = \\ &= F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{n+1}^{(k)}\right) + K_{n+1}^{(k)} \delta r_{n+1}^{(k)}, \end{aligned} \qquad 2.30$$

gdzie $K_{n+1}^{(k)}$ jest styczną macierzą sztywności. Po uwzględnieniu zależności 2.30 w równaniu 2.29 otrzymano

$$M\ddot{r}_{n+1}^{(k+1)} + C\dot{r}_{n+1}^{(k+1)} + F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{\mathrm{n+1}}^{(k)}\right) + K_{n+1}^{(k)} \delta r_{n+1}^{(k)} - F_{n+1}^{\mathrm{zew}} = 0. \qquad 2.31$$

Po przekształceniach przyjmuje ono następującą postać:

$$M\ddot{r}_{n+1}^{(k+1)} + C\dot{r}_{n+1}^{(k+1)} + K_{n+1}^{(k)} \delta r_{n+1}^{(k)} = F_{n+1}^{\mathrm{zew}} - F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{n+1}^{(k)}\right). \qquad 2.32$$

Iteracyjną poprawkę $\delta r_{n+1}^{(k)}$ do znanego wektora przemieszczeń węzłowych $r_{n+1}^{(k)}$ obliczono zgodnie ze wzorem:

$$r_{n+1}^{(k+1)} = r_{n+1}^{(k)} + \delta r_{n+1}^{(k)}. \qquad 2.33$$

Gdy człony inercyjne i lepkości mogą być pominięte, a siły zewnętrzne mają charakter statyczny, układ równań 2.32 przyjmuje postać:

$$K_{n+1}^{(k)} \delta r_{n+1}^{(k)} = F_{n+1}^{\mathrm{zew}} - F_{n+1}^{\mathrm{wew}}\left(r_{n+1}^{(k)}, \sigma_{n+1}^{(k)}\right). \qquad 2.34$$

Należy go rozwiązać ze względu na $\delta r_{n+1}^{(k)}$. Uzyskane rozwiązanie zapewnia, że rozważane ciało znajduje się w stanie równowagi statycznej (w odróżnieniu od poprzedniego przypadku, gdy ciało znajdowało się w stanie równowagi dynamicznej). W programie Abaqus/Standard przyjęto dwa kryteria zbieżności w odniesieniu do zagadnień quasi--statycznych: 1) siły resztkowe w stanie równowagi są mniejsze niż 0,5% średniej siły w ciele, 2) korekcja przemieszczeń $\delta r_{n+1}^{(k)}$ jest mniejsza niż 1% sumy korekcji przemieszczeń w poprzednich iteracjach.

2.3. Jawna metoda całkowania równań ruchu

Otrzymanie jawnego schematu całkowania równań ruchu wymaga zapisania równania 2.22 dla znanej konfiguracji w chwili t_n:

$$M\ddot{r}_n + C\dot{r}_n = F_n^{\mathrm{zew}} - F_n^{\mathrm{wew}}. \tag{2.35}$$

Zastosowanie jawnego schematu całkowania z masą skupioną w węzłach (diagonalna macierz mas) pozwala na rozprzężenie równań ruchu i nie ma potrzeby odwracania macierzy. Aby znaleźć pola przemieszczeń, prędkości i przyspieszenia w węzłach elementów skończonych w kolejnej chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ w programie Abaqus/Explicit, zastosowano schemat różnic centralnych (równania 2.36) ze zmiennym w czasie krokiem całkowania dla zapewnienia zbieżności metody:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + \dot{r}_{n+1/2}\Delta t_{n+1}, \\ \dot{r}_{n+1/2} &= \dot{r}_{n-1/2} + \ddot{r}_n\ \Delta t_{n+1/2}, \text{ gdzie } \Delta t_{n+1/2} = \tfrac{1}{2}(\Delta t_n + \Delta t_{n+1}), \\ \ddot{r}_n &= M_D^{-1}\left(F_n^{\mathrm{zew}} - F_n^{\mathrm{wew}} - C\dot{r}_n\right), \text{ gdzie } M_D^{-1} = \mathrm{diag}(M). \end{aligned} \tag{2.36}$$

W przeciwieństwie do metody niejawnego całkowania równań ruchu, która jest zawsze stabilna (niezależnie od wielkości kroku czasowego), procedura jawnego całkowania równań ruchu jest jedynie warunkowo stabilna:

$$\Delta t_{n+1} \leq \frac{2}{\omega_{\max}}. \tag{2.37}$$

Nierówność 2.37 stanowi warunek stabilności rozwiązania dla układu bez tłumienia. Zatem do określenia maksymalnego możliwego przyrostu czasu, który zapewnia stabilność schematu różnic centralnych, potrzebna jest wiedza o maksymalnej wartości własnej rozważanego układu $\omega_{\max}$. Dla układu z tłumieniem materiałowym taki stabilny przyrost czasu spełnia warunek:

$$\Delta t_{n+1} \leq \frac{2}{\omega_{\max}}\left(\sqrt{1+\xi^2} - \xi\right), \tag{2.38}$$

gdzie ξ jest częścią tłumienia krytycznego największej wartości własnej. Wprowadzenie tłumienia powoduje redukcję wartości stabilnego przyrostu czasu.

Ze względu na skomplikowane przykłady obliczeniowe, w których uwzględniono wiele zjawisk nieliniowych, również do rozwiązywania problemów quasi-statycznych wykorzystano niekiedy jawną metodę całkowania równań ruchu, stosowaną w programie Abaqus/Explicit.

3. Analiza mikromechaniczna

Mikrostruktura i jej wpływ na wybrane uśrednione właściwości mechaniczne betonu jest podstawowym elementem analizy w tym rozdziale. Ze względu na złożoną mikrostrukturę betonu przedstawiono sposób obliczenia uśrednionych właściwości mechanicznych na podstawie homogenizacji numerycznej. Struktura wewnętrzna betonu ma charakter wielofazowy, tzn. występuje faza ciągła kompozytu betonowego, czyli zaprawa, oraz fazy nieciągłe, czyli kruszywo grube i drobne, interfejs (warstwa przejściowa między kruszywem i zaprawą) oraz pustki powietrzne. Po uwzględnieniu budowy i właściwości mikrostruktury uzyskano powierzchnię zniszczenia w płaskim stanie naprężenia dojrzałego betonu (po umownych 28 dniach od wytworzenia – Barsoum, Ganguly, Hug 2006 oraz Alzebdeh, Ostoja-Starzewski 1996) oraz parametry sprężyste. Otrzymane w ten sposób parametry konstytutywne posłużą do obliczeń konstrukcji lub jej elementów, takich jak płyta czy belka betonowa.

Do homogenizacji numerycznej niezbędna jest analiza wielkości reprezentatywnej objętości (*Representative Volume Element* RVE, Drugan Willis, 1996) oraz sposobu generowania niejednorodnej struktury przez losowanie. Niżej przedstawiono dwa sposoby stochastycznego losowania: jednorodny i zdeterminowany (Ostoja-Starzewski 1998).

3.1. Struktura betonu

Beton jest przykładem materiału kompozytowego (Klisinski, Mróz 1988) bez przejawów periodyczności (Kamiński 2000). Kruszywo pełni w nim funkcję inkluzji zanurzonych w stwardniałej zaprawie (zhydratyzowany cement), stanowiącej wypełnienie. Kruszywo to niewielkie ziarna piasku o średnicy około 100 μm i większe kamienie o średnicy od 10 do 20 mm. Powierzchnia rozdziału obu faz, czyli interfejs, otacza kruszywo zanurzone w zaprawie. Typowa warstwa pośrednia ma grubość około 10 – 30 μm (Neville 2000). Elementem zwiększającym niejednorodność betonu są pustki powietrzne, które występują w ilości do 2% objętości betonu. Są one skutkiem niedostatecznego zagęszczenia mieszanki betonowej. Eksperymentalnie krzywą określającą potencjał betonu do przenoszenia obciążeń (tzw. krzywą Kupfera) wyznaczyli Kupfer, Hilsdo, Rusch (1969). Za pomocą homogenizacji określa się zachowanie betonu w skali makro (sztywność i wytrzymałość) na podstawie kinematycznych zjawisk zachodzących w strukturze betonu w skali mikro.

Istnieje wiele definicji reprezentatywnej objętości. Dwie z nich są następujące. Pierwsza (Drugan, Willis 1996):

„The RVE is the smallest material volume element of the composite for which the usual spatially constant 'overall modulus' macroscopic constitutive representation is a sufficiently accurate model to represent a mean constitutive response",

określa reprezentatywną objętość dla zakresu sprężystego. Druga (Ostoja-Starzewski 1998):

„The RVE is very clearly defined in two situations only: (i) unit cell in a periodic microstructure, and (ii) volume containing a very large (mathematically infinite) set of microscale elements (e.g. grains), possessing statistically homogeneous and ergodic properties"

zawiera warunki, w których możliwe jest określenie RVE. Naturalnie, reprezentatywna dla danego materiału objętość to jego statystyczna reprezentacja, uwzględniająca lokalną niejednorodność. W literaturze poświęconej mechanice materiałów podaje się, że reprezentatywna objętość powinna być od 10 do 100 razy większa niż wielkość inkluzji (Gambin 2006).

Właściwości dojrzałego betonu, a w szczególności wytrzymałość na ściskanie (Neville 2000), są pochodną głównie właściwości zaprawy i współczynnika wodno-cementowego (w/c), który wyraża stosunek masowy lub objętościowy wody zarobowej do cementu. Istotny jest stopień zagęszczenia mieszanki betonowej, wprost łączony ze sposobem stochastycznego losowania rozmieszczenia komponentów mikrostruktury betonu. Zawartość i rozmieszczenie pustek powietrznych to istotne elementy struktury. To właśnie w pustkach powietrznych (niedoskonałościach osłabiających beton) rozpoczyna się proces niszczenia (Klisiński, Mróz 1988). Również kruszywo decyduje w dużym stopniu o wytrzymałości gotowej struktury betonowej. Szczególnie jego rozdrobnienie (krzywa przesiewu), tekstura powierzchni, kształt i wytrzymałość wpływają na właściwości mechaniczne betonu (Jamroży 2003). W betonie zwykłym kruszywo jest najmocniejszą częścią kompozytu. Aby określić ewolucję struktury betonu podczas dojrzewania, należy uwzględnić zmiany w czasie parametrów betonu, które odpowiadają reakcjom chemicznym zachodzącym pomiędzy wodą i cementem.

W monografii skupiono się na właściwościach betonu dojrzałego, nie uwzględniono jego ewolucji, tzn. zmian właściwości mechanicznych podczas dojrzewania (Romanowski 2005). Cechy, które mają drugorzędne znaczenie, zostały pominięte.

Podstawową tezą tego rozdziału jest stwierdzenie, że istnieje możliwość wyprowadzenia za pomocą homogenizacji numerycznej właściwości mechanicznych betonu w skali makro, a w szczególności kształtu i wielkości powierzchni zniszczenia, na podstawie jego mikrostruktury. W rozważaniach uwzględniono tylko pola mechaniczne (przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia), a inne procesy fizyczno-chemiczne (np. dojrzewanie) pominięto. Powierzchnię zniszczenia i jej ewolucję w skali makro opisano następującym równaniem:

$$f\left(\sigma_{ij}, t, \dot{\varepsilon}_{ij}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Z równania 3.1 wynika, że krzywa zniszczenia f jest funkcją stanu naprężenia (elementów tensora naprężenia), wieku betonu t i prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon_{ij}}$. W tym rozdziale pominięto wpływ prędkości odkształceń na wytrzymałość oraz, zgodnie z powyższymi deklaracjami, pominięto również wpływ dojrzewania betonu. Zatem równanie 3.1 uproszczono do postaci:

$$f\left(\sigma_{ij}, t\right)\Big|_{t=28\ \mathrm{dni}} = 0. \tag{3.2}$$

Koncepcja numerycznej homogenizacji betonu ze stochastycznie rozłożonymi frakcjami wymaga wprowadzenia objętości, w której będą uśredniane lokalne pola naprężeń i odkształceń. Tą objętością jest objętość reprezentatywna (RVE) mająca postać wystarczająco dużego kwadratu do analizy dwuwymiarowej.

3.2. Zasady losowania

Opracowano dwie metody losowania. Pierwsza z nich to metoda jednorodnego losowania – MJL. Zgodnie z nią określono liczbę i wielkość elementów skończonych niezbędnych do dyskretyzacji reprezentatywnej objętości. Drugą metodą jest metoda zdeterminowanego losowania – MZL. Wprowadzono ją dla określenia fizycznej wielkości reprezentatywnej objętości, gdyż lepiej oddaje wewnętrzną budowę betonu i pozwala uwzględniać rzeczywiste wymiary i rozkład kruszywa.

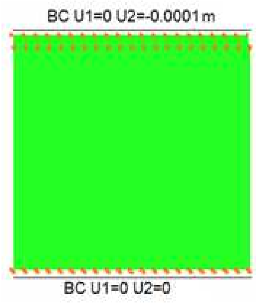
Stworzono program składający się z pięciu podstawowych bloków. Zadaniem pierwszego bloku jest wczytywanie podstawowych danych, czyli liczby elementów, liczby frakcji i liczby frakcji losowanych w sposób zdeterminowany. Pierwsza wartość oznacza liczbę elementów skończonych w reprezentatywnej objętości, druga ogólną liczbę frakcji kompozytu, a trzecia liczbę frakcji losowanych w sposób zdeterminowany jako kruszywo grube i drobne. Zdeterminowane frakcje są losowane dopóty, dopóki nie zostaną im przypisane wszystkie elementy.

W drugim bloku są analizowane wprowadzane dane. Ograniczeniami programu są:

- maksymalna liczba wszystkich frakcji – pięć i minimalna liczba – dwa, np. kruszywo grube, drobne, wypełnienie (zhydratyzowana zaprawa), interfejs i pustki powietrzne,
- kształt reprezentatywnej objętości – kwadrat,
- liczba frakcji losowanych w sposób zdeterminowany – maksymalnie dwie (kruszywo grube i drobne).

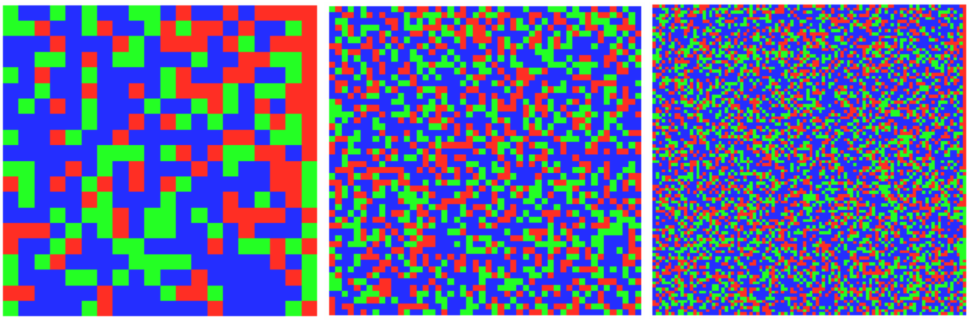
Kolejnym etapem jest wczytywanie liczby elementów odpowiadających kolejnym frakcjom (blok trzeci). Ich suma jest równa ogólnej liczbie elementów w modelu. Zadaniem tego bloku jest wybranie przypadku adekwatnego do wprowadzonych danych. Jeśli np. ogólna liczba frakcji jest równa pięć, a liczba frakcji losowanych w sposób zdeterminowany jest równa dwa, to oznacza to, że dwie frakcje są losowane w sposób zdeterminowany, a trzy w sposób jednorodny. Dalej (blok czwarty) następuje obliczenie granic podziału liczby losowej zmiennoprzecinkowej $\langle 0;1)$ na $n-1$ podprzedziałów, proporcjonalnie do liczby elementów odpowiadających określonym frakcjom. W ostatnim bloku programu (piątym) następuje proces stochastycznego losowania zgodnie z obiema metodami, tzn. MJL i MZL.

Początkowo prowadzone jest losowanie w sposób zdeterminowany (kruszywo), a następnie w sposób jednorodny (wypełnienie i pustki powietrzne). Na zakończenie program zapisuje wyniki losowania w pliku wejściowym programu Abaqus.



Rys. 3.1. Geometria i warunki brzegowe

Podstawowym problemem w wyznaczeniu zhomogenizowanych wartości parametrów kompozytu betonowego z niejednorodną strukturą wewnętrzną jest określenie reprezentatywnej objętości (RVE). Procedura znajdowania takiej objętości jest dobrze znana dla materiału sprężystego (Gambin 2006). W odniesieniu do betonu, który jest niejednorodny (losowy układ frakcji) i wykazuje cechy nieliniowe, homogenizacja musi się odbywać numerycznie. Istotne jest, że parametry uśrednionego zhomogenizowanego medium są pochodną rozmieszczenia i właściwości mechanicznych faz. Analizowano różne rozmieszczenia frakcji i ich wpływ na zhomogenizowane właściwości betonu. W czasie obliczeń, których celem jest uzyskanie powierzchni zniszczenia betonu zbliżonej do krzywej Kupfera, pośrednio rozważano jakość siatki MES (gęstość dyskretyzacji) i fizyczny rozmiar reprezentatywnej objętości w porównaniu z maksymalnymi wymiarami kruszywa.



Rys. 3.2. Jednorodne losowanie frakcji kompozytu

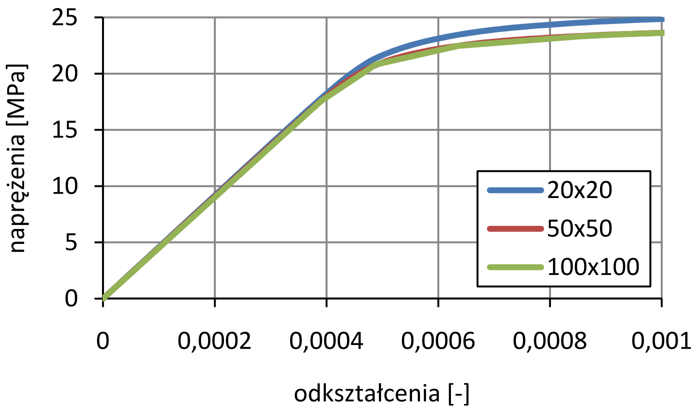
Na pierwszym etapie zbudowano geometryczne modele w kształcie kwadratu o boku 0,1 m (rys. 3.1), aby zweryfikować jakość siatki elementów skończonych. Trzy przykładowe frakcje, które zawierał każdy model, zostały wylosowane w sposób jednorodny (MJL). Modele zawierają 400, 2500 lub 10 000 elementów skończonych. Zbudowano pięć modeli dla każdej dyskretyzacji. Przykładowe losowania jednorodne dla 400, 2500 i 10000 elementów przedstawiono na rys. 3.2. Modele zawierają 50% frakcji nr 1 i po 25% frakcji nr 2 i 3. Frakcja pierwsza jest zaznaczona na wszystkich trzech przykładowych ilustracjach kolorem niebieskim, a frakcje druga i trzecia (równoliczne) kolorami odpowiednio zielonym i czerwonym. Wszystkie obliczenia wykonywano dla tych samych parametrów konstytutywnych, podanych w tab. 3.1. W modelach numerycznych założono płaski stan naprężenia. Przyjęto materiał sprężysto-plastyczny dla wszystkich frakcji w modelu. Warunki brzegowe przedstawiono na rys. 3.1. Zablokowano przemieszczenia pionowe i poziome dolnych węzłów modelu oraz poziome węzłów górnych. Model trójfazowego kompozytu jest ściskany w kierunku pionowym o 0,0001 m (wymuszenie kinematyczne dla węzłów górnej krawędzi). Aby określić, w jaki sposób losowanie wpływa na mechaniczne parametry zhomogenizowanego materiału, dla każdego modelu wykonano pięć losowań. To oznacza, że obliczono po pięć modeli (każdy odpowiadał innemu losowaniu metodą jednorodną) z 400, 2500 i 10 000 elementami skończonymi. Na rysunku 3.3 porównano krzywe naprężenie – odkształcenie dla wszystkich modeli. Zaprezentowano wyniki tylko dla jednego modelu z każdej rozważanej dyskretyzacji, wszystkie jednak zostały uwzględnione w obliczeniach statystycznych zhomogenizowanych właściwości mechanicznych omawianych w dalszej części pracy. Naprężenia odpowiadające odkształceniom 0,001 dla trzech przykładowych modeli przedstawiono w tab. 3.2. Wartości te odpowiadają wartościom maksymalnym na rys. 3.3.

Tab. 3.1. Parametry konstytutywne frakcji

Frakcja	Moduł Younga	Liczba Poissona	Granica sprężystości
1	30e9	0,2	20e6
2	50e9	0,2	40e6
3	100e9	0,2	60e6

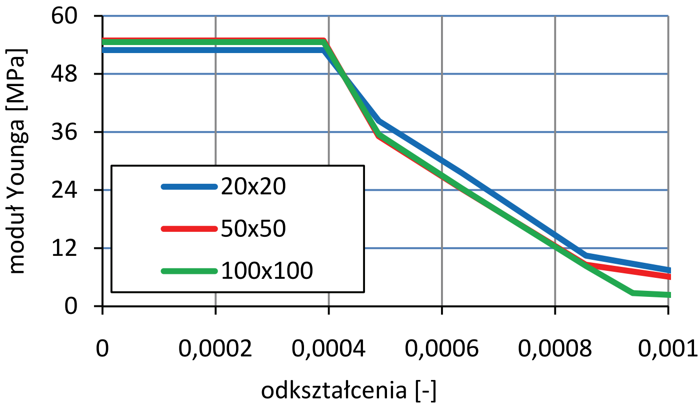
Tab. 3.2. Wartości początkowej sztywności i naprężenia

Liczba elementów	Moduł Younga	Naprężenia
400	52,935 GPa	24,902 MPa
2500	54,912 GPa	23,703 MPa
10000	54,575 GPa	23,620 MPa

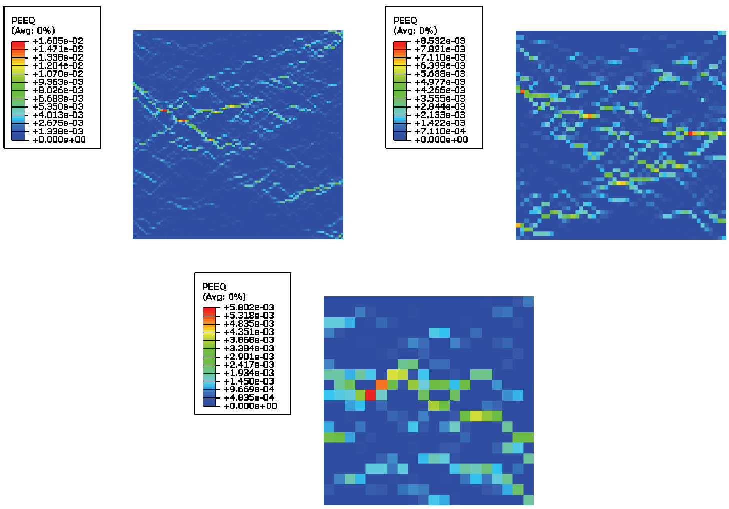


Rys. 3.3. Wykres naprężenie – odkształcenie dla jednoosiowego ściskania

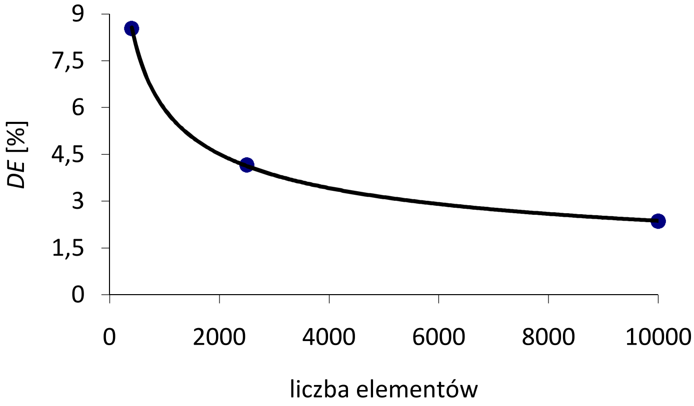
Przy dyskretyzacji obszaru na 400 elementów skończonych naprężenia osiągnęły wartość 24,902 MPa (rys. 3.3 i tab. 3.2). Przy dyskretyzacji na 2500 i 10 000 wartości naprężeń są bardzo podobne. Na rysunku 3.4 przedstawiono zmianę sztywności stycznej spowodowaną pojawieniem się trwałych odkształceń plastycznych frakcji kompozytu we wszystkich modelach trójfazowych. Wartości zhomogenizowanych modułów Younga (sztywności stycznej na rys. 3.4) również są zbieżne dla dyskretyzacji 2500 i 10 000. Rozkłady odkształceń plastycznych odpowiadających maksymalnym wartościom naprężeń dla przykładowych losowań przedstawiono na rys. 3.5.



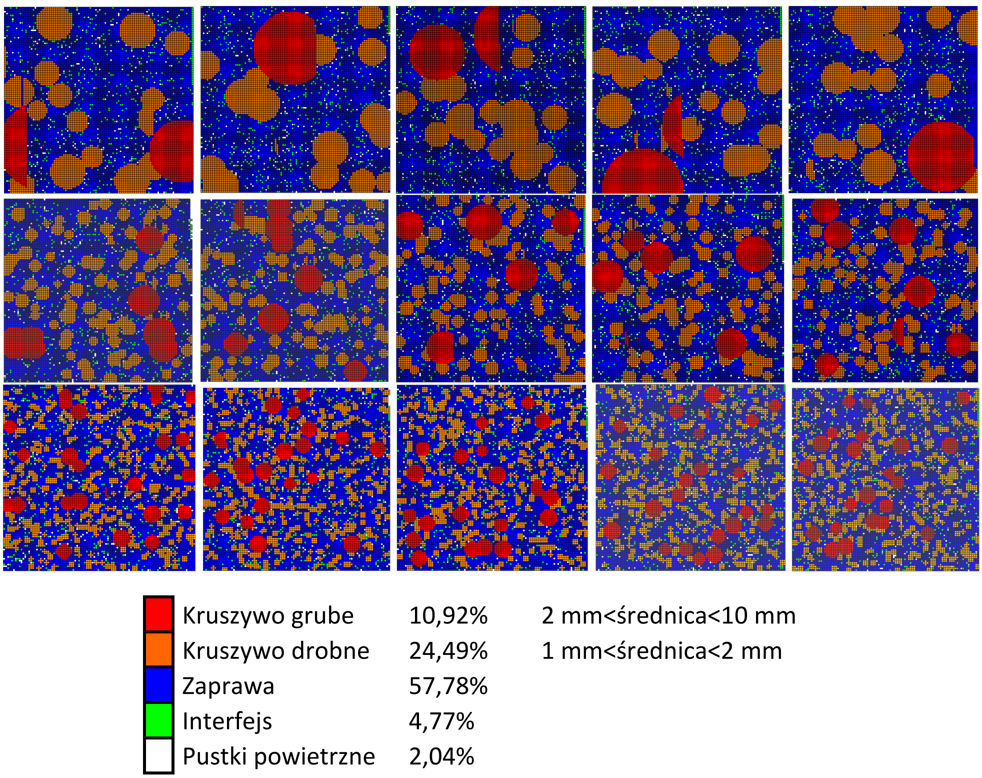
Rys. 3.4. Wykres zmiany modułu Younga w zależności od odkształceń



Rys. 3.5. Rozkład odkształceń plastycznych w teście jednoosiowego ściskania trójfazowego kompozytu



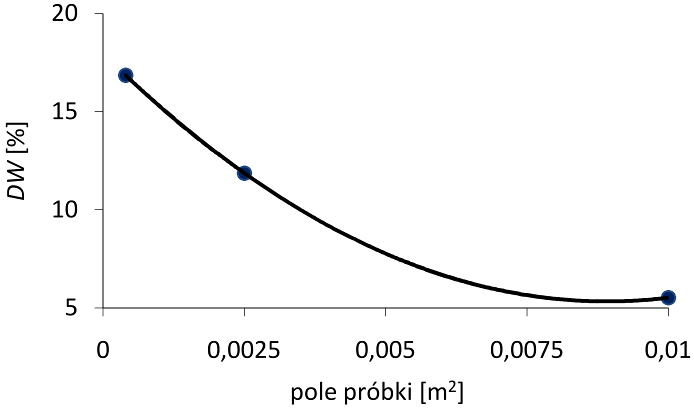
Rys. 3.6. Błąd względny sztywności jako funkcja liczby elementów



Rys. 3.7. Wygenerowane modele numeryczne

Analiza dyskretyzacji jest niezbędna do określenia wymiaru elementu skończonego wykorzystywanego na kolejnych etapach. Opierając się na obliczeniach wszystkich stochastycznie wylosowanych modeli, porównano wyniki reprezentatywnych wartości sztywności i naprężeń. Na rysunku 3.6 przedstawiono dyspersję (rozrzut) wartości sztywności jako funkcję liczby elementów. Taka analiza powinna być prowadzona, gdy kompozyt składa się z frakcji wykazujących silnie nieliniowe właściwości (np. materiał sprężysto-plastyczny ze zniszczeniem). Istnieją kryteria energetyczne do liniowej homogenizacji, które pozwalają obliczyć moduły sztywności stycznej, i numeryczna homogenizacja nie jest potrzebna. Na rysunku 3.6 pokazano, że wystarczająco dużą liczbą elementów skończonych w reprezentatywnej objętości jest 10 000. W tym przypadku dyspersja (rozrzut wyników) wynosi 2%. Dyspersję oblicza się zgodnie ze wzorem:

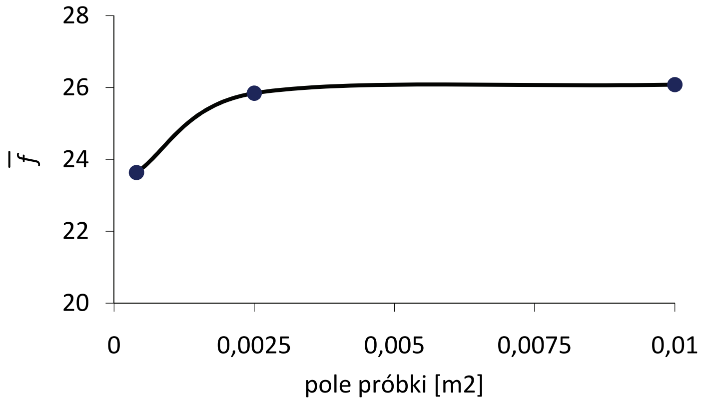
$$DE = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max}} \cdot 100\%.$$



Rys. 3.8. Wpływ powierzchni próbki na dyspersję wytrzymałości

Kolejnym elementem jest określenie rozmiarów reprezentatywnej objętości w stosunku do wielkości największego kruszywa. Zbudowano 15 numerycznych modeli, z których każdy zawierał 10 000 elementów skończonych. Wszystkie próbki mają, tak jak poprzednio, kwadratowy kształt i wymiar boku odpowiednio 0,02 m, 0,05 m i 0,1 m. Wszystkie modele są ściskane i niezależnie od długości boku mają po 10 000 elementów skończonych. Liczba ta została ustalona na podstawie wcześniejszych rozważań. We wszystkich modelach zaprawa jest modelowana jako plastyczno-krucha, natomiast inne frakcje są sprężyste. Na rysunku 3.7 przedstawiono rozkłady wszystkich pięciu frakcji dla pięciu różnych losowań odpowiadających trzem długościom boku reprezentatywnej objętości. Na rysunku 3.8 pokazano dyspersję wytrzymałości:

$$DW = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max}} \cdot 100\%$$



Rys. 3.9. Wpływ pola powierzchni próbki na średnią wytrzymałość

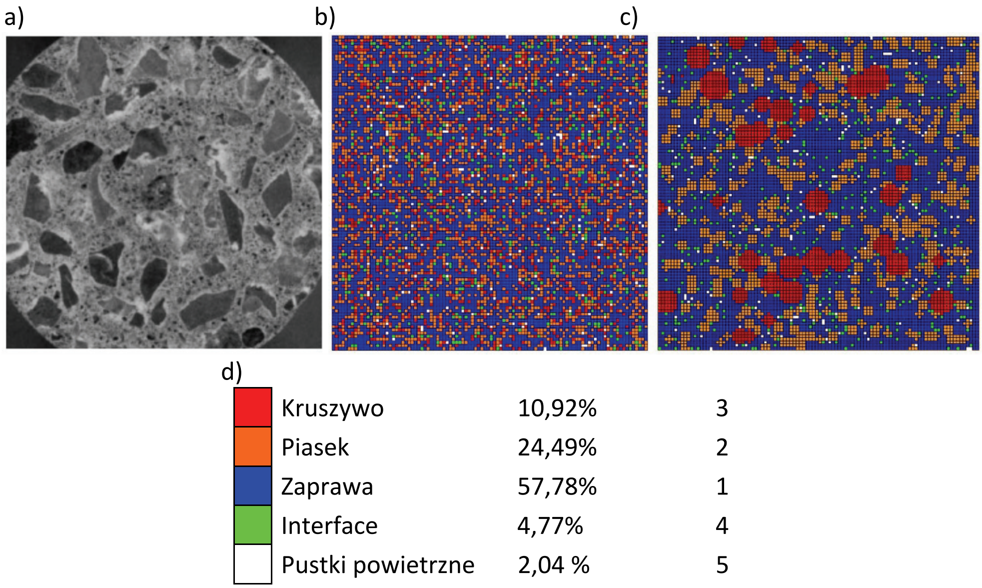
jako funkcję pola powierzchni próbki. Dyspersja wytrzymałości wynosi około 5% dla wymiaru próbki 0,1 m. Uwzględniwszy wnioski dotyczące liczby elementów skończonych w reprezentatywnej objętości, przyjęto, że reprezentatywna objętość dla kompozytu betonowego o wymiarze największego kruszywa równym 10 mm to w dwuwymiarowym przypadku kwadrat o boku 0,1 m podzielony na 10 000 elementów skończonych. Średnia wytrzymałość $\bar{f}$ kompozytu jest zależna od wymiarów próbki. Na rysunku 3.9 przedstawiono wpływ objętości reprezentatywnej na wytrzymałość mechaniczną. Wytrzymałość próbki o długości boku 0,05 m jest zbliżona do wytrzymałości próbki o boku 0,1 m, jednak rozrzut wyników jest znacznie większy (patrz rys. 3.8).

Na podstawie powyższych analiz można założyć, że wymiary reprezentatywnej objętości powinny być minimum pięć razy większe niż wymiary największego kruszywa. Przedstawione symulacje komputerowe i dyspersja wyników przedstawiona na rys. 3.6, 3.8 i 3.9 wskazują, że jeśli wymiary i dyskretyzacja reprezentatywnej objętości będą optymalne, to średnia wytrzymałość będzie zbieżna.

3.3. Powierzchnia zniszczenia i wnioski

Obliczenia numeryczne powierzchni zniszczenia wykonano w programie Abaqus. Proporcje składników i liczbę frakcji betonu określono na podstawie testów laboratoryjnych przeprowadzonych w Instytucie Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej (Jasiczak, Szymański 2006). Model numeryczny zawiera 10 000 elementów skończonych płaskiego stanu naprężenia. Ostateczną dyskretyzację przedstawiono na rys. 3.10. Porównania dokonano dla dwóch sposobów losowania: jednorodnego (pięć frakcji losowane MJL) i zdeterminowanego (dwie frakcje losowane MZL i trzy MJL).

Na rysunku 3.10d zaprezentowano pięć frakcji kompozytu: kruszywo, piasek, zaprawa, interfejs i pustki powietrzne. Przedstawiono również przełom typowego betonu (rys. 3.10a). Pierwszy rozkład frakcji (rys. 3.10b) odpowiada danym wejściowym: liczba elementów = 10 000, liczba frakcji = 5 i liczba frakcji losowanych w sposób zdeterminowany = 0. To oznacza, że wszystkie frakcje zostały wylosowane (rozmieszczone MJL). Drugi rozkład (rys. 3.10c) odpowiada danym: liczba elementów = 10 000, liczba frakcji = 5, liczba frakcji losowanych w sposób zdeterminowany = 2, dzięki czemu dwie frakcje (kruszywo i piasek) zostały rozmieszczone MZL, a pozostałe MJL.



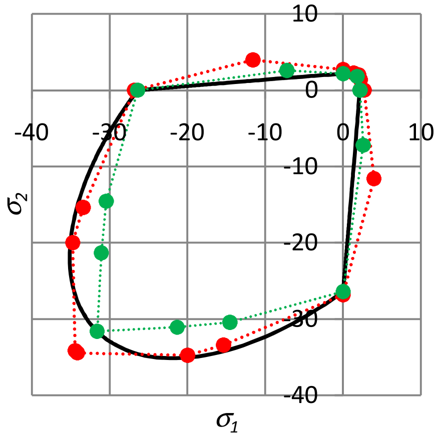
Rys. 3.10. Konfiguracja frakcji 1-5: a) przełom, b) losowanie jednorodne, c) losowanie zdeterminowane, d) objętościowy skład betonu

Właściwości mechaniczne przypisano wszystkim frakcjom dla stworzenia powierzchni zniszczenia kompozytu betonowego. Zaprawę i interfejs modelowano jako materiał sprężysto-plastyczno-kruchy. Kruszywo modelowano jako materiał sprężysto-plastyczny, a elementy wylosowane jako pustki powietrzne usunięto z siatki elementów skończonych. W tabeli 3.3 podano szczegółowe informacje o parametrach konstytutywnych wszystkich frakcji kompozytu (moduł Younga E, liczbę Poissona ν, granicę sprężystości w ściskaniu f_c^{el}, odkształcenia plastyczne przy zniszczeniu ε^f, odcięcie w rozciąganiu f^t).
W symulacjach komputerowych uwzględniono różne kombinacje obciążeń (odpowiadające wymuszeniom kinematycznym na wszystkich czterech krawędziach modeli). Dla określenia odpowiedniej liczby punktów na powierzchniach zniszczenia zastosowano 15 różnych schematów obciążenia. Punkty krytyczne wyznaczone na podstawie wszystkich symulacji numerycznych, odpowiadające obu losowaniom z rys. 3.10, przedstawiono na rys. 3.11. Kryterium identyfikacji punktów jest oparte na określeniu maksymalnej wartości ekwiwalentnych naprężeń dla obu metod losowania: zdeterminowanej (zielone punkty) i jednorodnej (czerwone punkty). Na rysunku 3.11 oprócz punktów wyznaczonych z obu losowań zamieszczono krzywą zniszczenia Lublinera (patrz podrozdział 4.3) w płaskim sta-

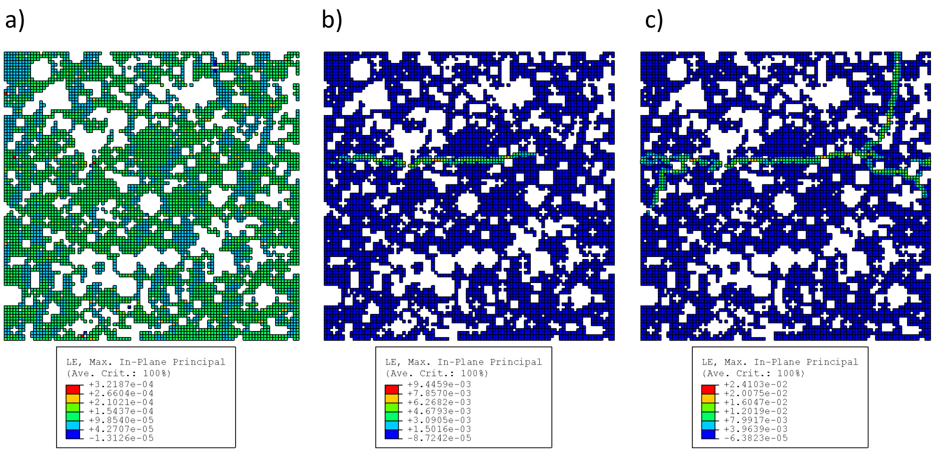
nie naprężenia (linia czarna). Punktami identyfikacji były w tym przypadku: f_c = 26,4 MPa f_t = 2,2 MPa oraz f_{bc} = 31,6 MPa, co odpowiada α = 0,1413945, β = 9,6548584 i γ = 3,0. Identyfikację tę omówiono szczegółowo w podrozdziale 4.3).

Tab. 3.3. Parametry konstytutywne frakcji

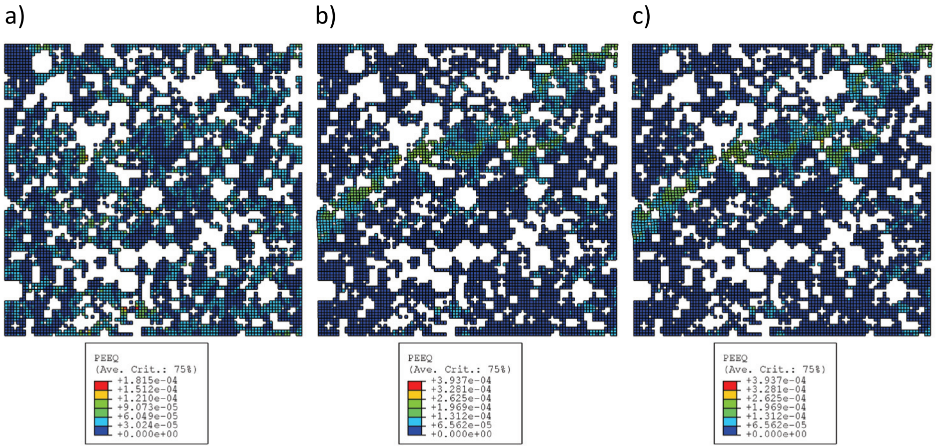
Frakcja	E [Pa]	ν	f_c^{el} [Pa]	ε^f	f^t [Pa]
Kruszywo	$3 \cdot 10^{10}$	0.3	$30 \cdot 10^6$		
Drobne kruszywo	$3 \cdot 10^{10}$	0.3	$50 \cdot 10^6$		
Zaprawa	$2 \cdot 10^{10}$	0.2	$47,3 \cdot 10^6$	0,00018	$2 \cdot 10^6$
Interfejs	$8 \cdot 10^9$	0.2	$40 \cdot 10^6$	0,00012	



Rys. 3.11. Powierzchnia zniszczenia dojrzałego betonu



Rys. 3.12. Rozkład maksymalnych odkształceń logarytmicznych przy rozciąganiu: a) przed utratą nośności, b) w chwili osiągnięcia maksymalnej nośności, c) po zniszczeniu



Rys. 3.13. Rozkład ekwiwalentnych odkształceń plastycznych dla jednoosiowego ściskania: a) przed zniszczeniem, b) w chwili osiągnięcia maksymalnej nośności, c) po zniszczeniu

Przedstawiona na rys. 3.11 krzywa Lublinera jest zbliżona do wyników eksperymentalnych badań betonu w płaskim stanie naprężenia prezentowanych przez Kupfera, Hilsdo i Ruscha (1969). Beton o strukturze jednorodnej DJ wykazuje w symulacjach większą wytrzymałość przy dwuosiowym ściskaniu niż beton o strukturze zdeterminowanej DZ. Na rysunkach 3.12 i 3.13 przedstawiono mapy głównych naprężeń rozciągających dla jednego z przypadków obciążenia (jednoosiowego rozciągania) oraz mapy ekwiwalentnych odkształceń plastycznych dla jednoosiowego ściskania. Zaprezentowano po trzy mapy: przed zniszczeniem, w czasie maksymalnego wytężenia i tuż po zniszczeniu. Podczas jednoosiowego rozciągania pojawia się jedna rysa, która propaguje się w stwardniałej zaprawie, patrz rys. 3.12. Jednoosiowe ściskanie wybranej próbki prowadzi do powstania strefy ścinania, jak przedstawiono na rys. 3.13. Ważnym efektem tej części rozprawy jest pokazanie, jak mikrostruktura wpływa na zachowanie betonu w skali makro.

4. Quasi-statyczne kryteria zniszczenia

Wytrzymałość betonu w złożonym stanie naprężenia zależy od stopnia złożoności tego stanu. Nie może być zatem określona tylko na podstawie prostych testów, jak rozciąganie, ściskanie czy ścinanie (Chen 1982 oraz Klisinski, Mróz 1988). Dla przykładu, beton zwykły o wytrzymałości na ściskanie f_c poddany dodatkowemu ścinaniu równemu 0,08f_c ulega zniszczeniu pod wpływem siły ściskającej równej 0,5f_c. Zatem wytrzymałość betonu może być określona tylko z uwzględnieniem interakcji różnych składowych stanu naprężenia.
W rozdziale tym zamieszczono opis quasi-statycznych kryteriów zniszczenia betonu jako funkcji niezmienników stanu naprężenia. W przeszłości przedstawiono wiele kryteriów zniszczenia (Bresler, Pister 1958; Klisinski, Mróz 1988; Chen 1982; Lubliner, Oliver, Oller, Oñate 1989 oraz Podgórski 1984), które są opisane niżej. Dodatkowym elementem jest tzw. energetyczna interpretacja najczęściej używanych kryteriów. Modelując konstrukcje betonowe w trójosiowym stanie naprężenia, wykorzystuje się wiele kryteriów, a mianowicie kryterium płynięcia, inicjacji zarysowania czy kryterium nośności. Dopiero na końcowym etapie w miarę wzrostu deformacji dochodzi do zniszczenia.
Zasadniczo zniszczenie betonu może być podzielone na dwa typy. Pierwszy to zniszczenie przy dominującym rozciąganiu (patrz podrozdział 1.1), a drugi przy dominującym ściskaniu (patrz podrozdział 1.1) (Chen, Chen 1975). Zniszczenie w wyniku rozciągania jest związane z pojawieniem się dominującej rysy i ogólnie spadkiem nośności w kierunku prostopadłym do niej. W ściskaniu dochodzi do rozwoju i ewolucji wielu małych rys i w rezultacie do utraty wytrzymałości betonu – do pokruszenia.

4.1. Ogólna postać kryterium

Kryteria zniszczenia są funkcją stanu naprężenia, a właściwie niezmienników stanu naprężenia, niezależnie od wyboru układu współrzędnych, w którym je określono. Najogólniej kryterium zniszczenia w stanie quasi-statycznym można przedstawić w postaci:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \qquad 4.1$$

gdzie σ_1, σ_2 i σ_3 są trzema głównymi naprężeniami. Ze względu na trudności w geometrycznej i fizycznej interpretacji kryteriów zniszczenia i możliwość ich wyrażenia przez I_1, J_2 i J_3 równanie 4.1 przedstawia się w postaci:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0. \quad 4.2$$

W tym wzorze I_1 jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia σ_{ij}, a J_2 i J_3 są drugim i trzecim niezmiennikiem dewiatora tensora naprężenia s_{ij}.

Trzy niezmienniki tensora naprężenia σ_{ij} oblicza się w następujący sposób (Gawęcki 1998):

$$\begin{gathered} I_1 = \sigma_{ii}, \\ I_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_{ij}\sigma_{ij}, \\ I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij}\sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3. \end{gathered} \quad 4.3$$

W przypadku wyboru układu współrzędnych pokrywającego się z głównymi kierunkami naprężenia (znikają naprężenia styczne) trzy niezmienniki przyjmują postać:

$$\begin{gathered} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{gathered} \quad 4.4$$

Wartości niezmienników nie zależą od wyboru układu współrzędnych, dlatego są nazywane niezmiennikami tensora naprężenia σ_{ij}. Tensor naprężenia może być wyrażony przez sumę dwóch innych tensorów. Jednym z nich niech będzie hydrostatyczny (sferyczny) tensor naprężeń σ_m, a drugim – tensor określający odchylenie od stanu hydrostatycznego s_{ij}, zgodnie z następującą regułą:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}, \quad 4.5$$

gdzie

$$\sigma_m = \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad 4.6$$

jest aksjatorem tensora naprężenia i reprezentuje średnie naprężenie tensora hydrostatycznego, a

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad 4.7$$

jest dewiatorem tensora naprężenia i reprezentuje czyste ścinanie. Niezmienniki dewiatora tensora naprężenia zapisuje się w postaci:

$$\begin{gathered} J_1 = s_{ii} = 0, \\ J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}, \\ J_3 = \frac{1}{3} s_{ij}s_{jk}s_{ki}. \end{gathered} \quad 4.8$$

Również w tym przypadku po wyborze układu współrzędnych pokrywającego się z głównymi kierunkami naprężenia (kierunki główne identyczne dla s_{ij} i σ_{ij}) trzy niezmienniki przyjmują postać:

$$\begin{gathered} J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 0, \\ J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \\ J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3. \end{gathered} \quad 4.9$$

Za argumenty funkcji $f()$ w równaniu 4.2 przyjęto pierwszy niezmiennik tensora naprężenia I_1 oraz drugi J_2 i trzeci J_3 niezmiennik dewiatora tensora naprężenia.
Całkowita energia sprężysta przypadająca na jednostkową objętość materiału W (gęstość energii) może być podzielona na dwie części (Gawęcki 1998). Pierwsza z nich jest związana ze zmianą objętości W_1, a druga ze zmianą kształtu W_2, zgodnie z zależnością $W = W_1 + +W_2$, gdzie:

$$W_1 = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2, \tag{4.10}$$

$$W_2 = \frac{1+\nu}{E} J_2, \tag{4.11}$$

przy czym E i ν są modułem Younga oraz liczbą Poissona. Niezmienniki I_1, J_2 są bezpośrednio związane z energią odkształcenia objętościowego W_1 i z energią odkształcenia postaciowego W_2.

4.2. Kryteria zniszczenia

Kryteria zniszczenia to pewne ograniczenia zapisane jako funkcje naprężeń lub odkształceń albo niezmienników tensorów naprężenia czy odkształcenia. Mogą być użyte jako powierzchnie potencjału plastycznego lub powierzchnie obciążenia w opisie niesprężystych deformacji betonu. Istnieje możliwość przedstawienia kryterium wytężenia materiału w formie energetycznej (Burzyński 1928). Ogólnie kryterium energetyczne należy rozumieć jako hipotezę zmiennej krańcowej objętościowo-postaciowej energii odkształcenia. To kryterium po zamianie gęstości energii na niezmienniki tensorów naprężenia i dewiatora naprężania w przekroju południkowym ma postać krzywej stopnia drugiego, podobnie jak kryterium Mroza (elipsa). Kryterium Burzyńskiego dla pewnej kombinacji parametrów ma postać elipsy, w innym przypadku paraboli lub hiperboli.

Kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH)

Trzech autorów niezależnie opublikowało omawiane kryterium: Huber (1904), Mises (1913) i Hencky (1924). Kryterium jest stosowane jako kryterium wytężeniowe dla materiałów ciągliwych i stanowi punkt wyjścia do prezentacji kryteriów odnoszących się stricte do betonu.
Zgodnie z kryterium HMH o wytężeniu materiału decyduje tylko i wyłącznie energia odkształcenia postaciowego (patrz równanie 4.11). Kryterium zapisano w następującej formie:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0. \tag{4.12}$$

Gdy podstawimy do niego zależność 4.9b, otrzymamy:

$$\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right] - k^2 = 0. \tag{4.13}$$

W kryterium tym założono jeden parametr konstytutywny k, decydujący o kształcie powierzchni zniszczenia, istotnym elementem jest więc identyfikacja tego parametru. Założmy, że wytrzymałość materiału na ściskanie to f_c. W świetle kryterium HMH jest oczywiste, że wytrzymałość na rozciąganie jest identyczna: $f_t = -f_c$. Hipotezę wytężeniową określoną równaniem 4.13 w przestrzeni głównych naprężeń można przedstawić jako powierzchnię walcową o tworzącej równoległej do osi hydrostatycznej. Aby zidentyfikować stałą materiałową k, należy określić promień powierzchni walcowej. Zakładamy, że w materiale panuje jednokierunkowy stan naprężenia, co odpowiada wartości tensora naprężenia:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Niech $\sigma_1 = f_c$, wtedy równanie 4.13 przyjmuje postać:

$$\frac{1}{6}[(f_c)^2 + (-f_c)^2] - k^2 = 0. \tag{4.15}$$

Po przekształceniach otrzymujemy zależność:

$$k = \frac{f_c}{\sqrt{3}}. \tag{4.16}$$

Dla zilustrowania kryterium HMH na rys. 4.1 przedstawiono przekrój południkowy. Tworzącą powierzchni walcowej opisuje równanie:

$$r = f_c\sqrt{6}/3 \approx 24{,}5 \text{ MPa}$$

w przestrzeni $r - \xi$, przy czym

$$r = \sqrt{2J_2}\,, \xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}. \tag{4.17}$$

W kryterium HMH, gdy tylko jeden parametr decyduje o jego kształcie, identyfikacji dokonano na podstawie wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30$ MPa.
Istotne jest również określenie kształtu powierzchni zniszczenia w płaskim stanie naprężenia (przekrój $\sigma_1 - \sigma_2$ dla $\sigma_3 = 0$). Aby tego dokonać, należy zmienne σ_1, σ_2 równania 4.13 zamienić na $\alpha\sigma_2$, σ_2 przez podstawienie:

$$\sigma_1 = \alpha\sigma_2. \tag{4.18}$$

Wtedy otrzymujemy:

$$\sigma_2^2(\alpha^2 - \alpha + 1) - \frac{f_c^2}{3} = 0. \tag{4.19}$$

Po przekształceniach

$$\sigma_2 = \pm\frac{f_c}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}, \tag{4.20}$$

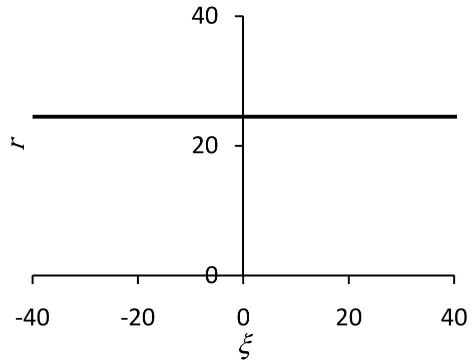
a

$$\sigma_1 = \pm\alpha\frac{f_c}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}, \tag{4.21}$$

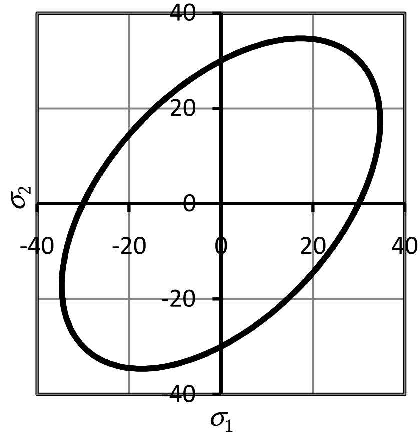
przy czym α zmienia się w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$.

Rozwiązaniem układu równań 4.20 – 4.21 jest zbiór punktów (σ_1, σ_2). W przypadku kryterium HMH otrzymujemy krzywą zapisaną w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest α. Krzywą tą jest elipsa (rys. 4.2). Stosowanie HMH do betonu jest ograniczone (Suidan, Schnobrich 1973). Uwzględniając równania 4.10 oraz 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego decydującą o zniszczeniu materiału:

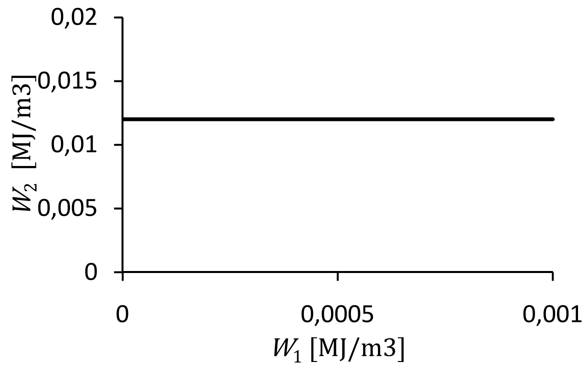
$$W_2 = \frac{(1+\nu)}{E}\frac{f_c^2}{3} = 0{,}012\ \mathrm{MJ/m^3}. \qquad 4.22$$



Rys. 4.1. Przekrój południkowy
(kryterium HMH)



Rys. 4.2. Płaski stan naprężenia
(kryterium HMH)



Rys. 4.3. Kryterium HMH w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

W płaszczyźnie wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia postaciowego W_2 i gęstość energii odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia dla określonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30$ MPa, modułu Younga $E = 30e3$ MPa oraz liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.3.

Kryterium Druckera-Pragera (DP)

W tym kryterium zniszczenia betonu uwzględnia się dodatkowo wpływ pierwszego niezmiennika stanu naprężenia i gęstości energii odkształcenia objętościowego (Drucker 1959 oraz Prager 1952). Kryterium zapisujemy w następującej formie:

$$f(I_1, J_2) = mI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0. \tag{4.23}$$

W celu identyfikacji obu parametrów konstytutywnych, czyli m oraz k, należy użyć dwóch punktów, czyli $(f_t, 0)$ i $(-f_c, 0)$. Wymaga się, aby powierzchnia określona równaniem 4.23 przechodziła przez oba punkty. Po rozpisaniu równania 4.23 za pomocą naprężeń głównych otrzymamy:

$$m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - k = 0. \tag{4.24}$$

Po uwzględnieniu obu punktów identyfikacyjnych, ostatecznie otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} f_t m + \sqrt{\frac{1}{6}[(f_t)^2 + (-f_t)^2]} - k = 0 \\ -f_c m + \sqrt{\frac{1}{6}[(-f_c)^2 + (f_c)^2]} - k = 0 \end{cases}. \tag{4.25}$$

Rozwiązaniem układu równań 4.25 jest para liczb (m, k):

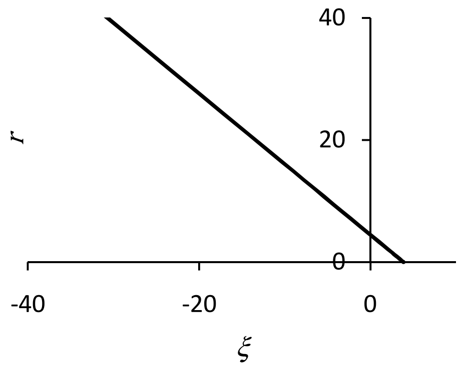
$$\begin{cases} m = \frac{(f_c - f_t)}{\sqrt{3}(f_c + f_t)} \\ k = \frac{2f_c f_t}{\sqrt{3}(f_c + f_t)} \end{cases}. \tag{4.26}$$

Założenie, że $f_c = 30$ MPa i $f_t = 3$ MPa, prowadzi do określenia dwóch parametrów konstytutywnych: $m = 0{,}47$ i $k = 3{,}15$. Na rysunku 4.4 w przestrzeni południkowej przedstawiono kryterium DP o równaniu:

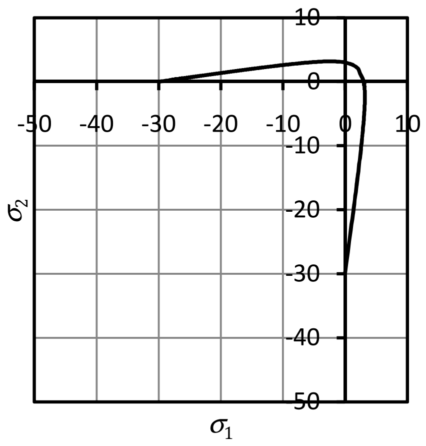
$$r = k\sqrt{2} - \sqrt{6}m\xi.$$

Przekrój dewiatorowy jest okręgiem. Istotne jest określenie kształtu w przestrzeni $\sigma_1 - \sigma_2$ $(\sigma_3 = 0)$. Aby tego dokonać, należy zmienne σ_1, σ_2 równania 4.24 zamienić na $\alpha\sigma_2$, σ_2, analogicznie jak we wzorze 4.18. Wtedy otrzymujemy

$$\sigma_2(\alpha + 1)m + |\sigma_2| \frac{\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}{\sqrt{3}} - k = 0. \tag{4.27}$$



Rys. 4.4. Przekrój południkowy (kryterium DP)



Rys. 4.5. Płaski stan naprężenia (kryterium DP)

Po przekształceniach

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{3}(\alpha + 1)m \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}, \qquad 4.28$$

a

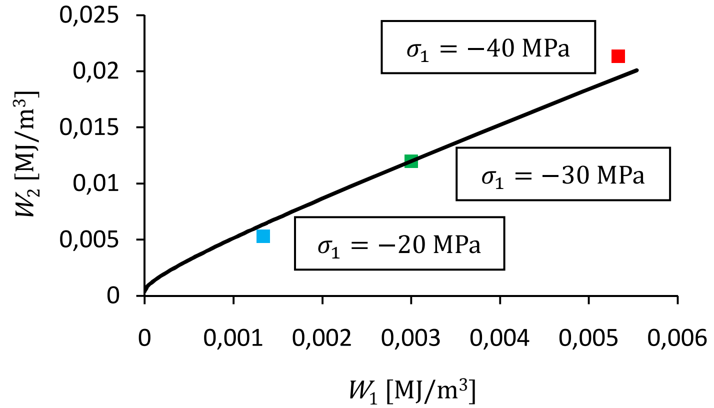
$$\sigma_1 = \alpha \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{3}(\alpha + 1)m \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}, \qquad 4.29$$

przy czym α zmienia się w przedziale $\langle -\infty, \infty \rangle$. Graficzną interpretacją układu równań 4.28 – 4.29 jest zbiór punktów (σ_1, σ_2). W przypadku kryterium DP otrzymujemy krzywą zapisaną w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest α. Przedstawiono ją na rys. 4.5.
Uwzględniając równania 4.10 oraz 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego, decydującą o zniszczeniu materiału według kryterium DP, jako funkcję gęstości energii odkształcenia objętościowego:

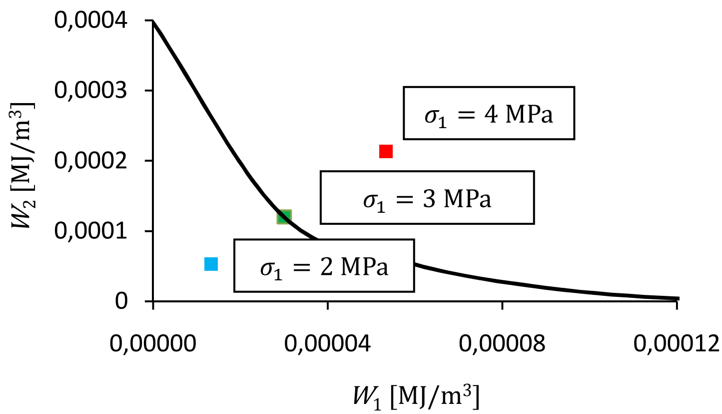
$$W_2 = \begin{cases} \frac{1+\nu}{E}k^2 + 2mk\frac{1+\nu}{E}\sqrt{\frac{6E}{1-2\nu}W_1} + 6m^2\frac{1+\nu}{1-2\nu}W_1, & I_1 < 0 \\ \frac{1+\nu}{E}k^2 - 2mk\frac{1+\nu}{E}\sqrt{\frac{6E}{1-2\nu}W_1} + 6m^2\frac{1+\nu}{1-2\nu}W_1, & I_1 \geq 0 \end{cases}. \qquad 4.30$$

W płaszczyźnie wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia postaciowego W_1 i gęstość energii odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia DP dla określonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30$ MPa i rozciąganie $f_t = 3$ MPa, modułu Younga $E = 30e3$ MPa oraz liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.6.

a)



b)



Rys. 4.6. Kryterium DP w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Inaczej niż w przypadku HMH, tutaj są dwie krzywe ograniczające. Krzywa o równaniu 4.30a na rys. 4.6a dotyczy sytuacji, gdy $I_1 < 0$, a krzywa 4.30b na rys. 4.6b przypadku, gdy $I_1 > 0$. Zaznaczono również kilka charakterystycznych punktów dla jednoosiowych naprężeń ściskających 20, 30, 40 MPa oraz jednoosiowych naprężeń rozciągających 2, 3, 4 MPa.

Kryterium Breslera-Pistera (BP)

To kryterium zniszczenia (Bresler, Pister 1958) określa wytrzymałość betonu w złożonym stanie naprężenia. Uwzględniono w nim zarówno energię odkształcenia postaciowego, jak i energię odkształcenia objętościowego. Kryterium zapisujemy w następującej formie:

$$f(I_1, J_2) = A + BI_1 + C(I_1)^2 - \sqrt{J_2} = 0. \quad 4.31$$

W celu identyfikacji trzech parametrów konstytutywnych, czyli A, B i C, należy użyć trzech punktów wyznaczonych w eksperymentach laboratoryjnych (patrz podrozdział 1.1), czyli $(f_t, 0)$, $(-f_c, 0)$ oraz $(-f_{bc}, -f_{bc})$, gdzie f_{bc} jest wytrzymałością betonu przy dwuosiowym ściskaniu. Wymaga się, aby powierzchnia określona równaniem 4.31 przechodziła przez trzy punkty. Po rozpisaniu powyższego wzoru za pomocą naprężeń głównych otrzymuje się

$$\begin{gathered} A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \\ - \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 0. \end{gathered} \tag{4.32}$$

Po uwzględnieniu trzech identyfikacyjnych punktów ostatecznie otrzymuje się układ równań zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -f_c & f_c^2 \\ 1 & f_t & f_t^2 \\ 1 & -2f_{bc} & 4f_{bc}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c/\sqrt{3} \\ f_t/\sqrt{3} \\ f_{bc}/\sqrt{3} \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Rozwiązaniem układu równań 4.33 są trzy liczby (A, B, C) postaci:

$$\begin{cases} A = \dfrac{(f_c f_t f_{bc})(f_t + 3f_c + 8f_{bc})}{\sqrt{3}(f_c + f_t)(2f_{bc} - f_c)(2f_{bc} + f_t)} \\ B = \dfrac{(f_c - f_t)(f_{bc}f_c + f_{bc}f_t - f_t f_c - 4f_{bc}^2)}{\sqrt{3}(f_c + f_t)(2f_{bc} - f_c)(2f_{bc} + f_t)} \\ C = \dfrac{(3f_{bc}f_t - f_{bc}f_c - 2f_t f_c)}{\sqrt{3}(f_c + f_t)(2f_{bc} - f_c)(2f_{bc} + f_t)} \end{cases}. \tag{4.34}$$

Założywszy, że $f_c = 30\ \mathrm{MPa}$, $f_t = 3\ \mathrm{MPa}$, a $f_{bc} = 33{,}6\ \mathrm{MPa}$, obliczono trzy parametry konstytutywne: $A = 3{,}6832$, $B = -\,0{,}6326$ i $C = -\,0{,}0059$. Na rysunku 4.7 w przestrzeni południkowej przedstawiono kryterium o równaniu:

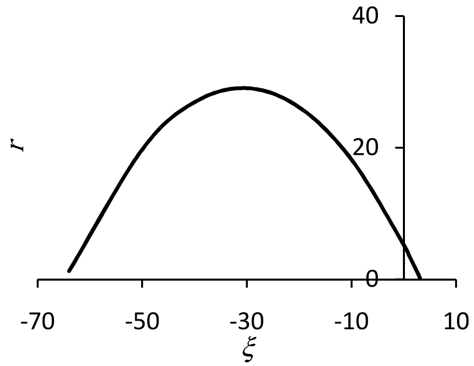
$$r = A\sqrt{2} - B\sqrt{6}\xi + C3\sqrt{2}\xi^2.$$

Przekrój dewiatorowy jest okręgiem. Istotne jest określenie kształtu w przestrzeni $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). Aby tego dokonać, należy zmienne σ_1, σ_2 równania 4.32 zamienić na $\alpha\sigma_2$, σ_2, analogicznie jak we wzorze 4.18. Wtedy otrzymujemy:

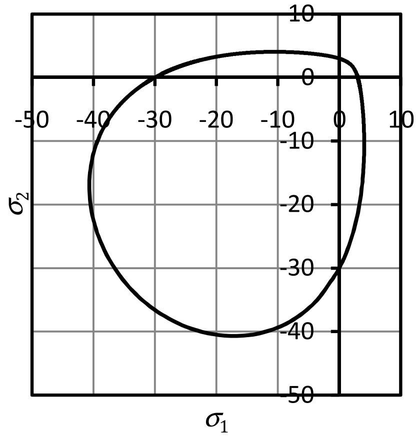
$$C\sqrt{3}(\alpha^2 + 2\alpha + 1)\sigma_2^2 + B\sqrt{3}(\alpha + 1)\sigma_2 - \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}|\sigma_2| + A\sqrt{3} = 0. \tag{4.35}$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na σ_2. Po rozpisaniu wartości bezwzględnej otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{cases} C\sqrt{3}(\alpha^2 + 2\alpha + 1)\sigma_2^2 + \left(B\sqrt{3}(\alpha + 1) - \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}\right)\sigma_2 + A\sqrt{3} = 0, & \sigma_2 \geq 0 \\ C\sqrt{3}(\alpha^2 + 2\alpha + 1)\sigma_2^2 + \left(B\sqrt{3}(\alpha + 1) + \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}\right)\sigma_2 + A\sqrt{3} = 0, & \sigma_2 < 0 \end{cases}. \tag{4.36}$$



Rys. 4.7. Przekrój południkowy (kryterium BP)



Rys. 4.8. Płaski stan naprężenia (kryterium BP)

Rozwiązaniem, które spełnia pierwsze równanie 4.36 wraz z ograniczeniem, jest większy z pierwiastków, czyli

$$\sigma_2 = \frac{-\left(B\sqrt{3}(\alpha+1) - \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right) + \sqrt{\Delta}}{2C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)}, \tag{4.37}$$

gdzie

$$\Delta = \left(B\sqrt{3}(\alpha+1) - \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right)^2 - 4\left(C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)\sigma_2^2\right)A\sqrt{3}. \tag{4.38}$$

Druga współrzędna punktu leżącego na powierzchni zniszczenia w płaskim stanie naprężenia to

$$\sigma_1 = \frac{-\left(B\sqrt{3}(\alpha+1) - \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right) + \sqrt{\Delta}}{2C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)}\alpha. \tag{4.39}$$

Rozwiązaniem, które spełnia drugie równanie 4.36 wraz z ograniczeniem, jest mniejszy z pierwiastków, czyli

$$\sigma_2 = \frac{-\left(B\sqrt{3}(\alpha+1) + \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right) + \sqrt{\Delta}}{2C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)}, \tag{4.40}$$

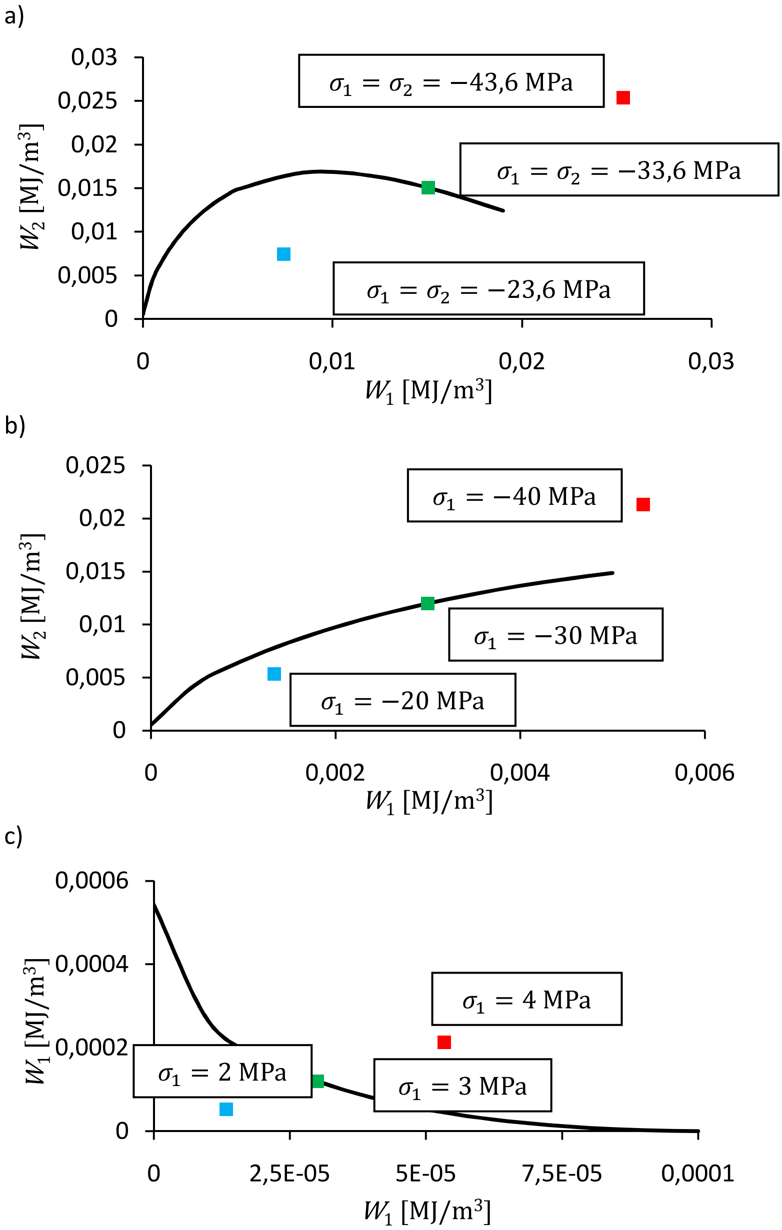
gdzie

$$\Delta = \left(B\sqrt{3}(\alpha+1) + \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right)^2 - 4\left(C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)\sigma_2^2\right)A\sqrt{3}. \tag{4.41}$$

Druga współrzędna punktów leżących na powierzchni zniszczenia w płaskim stanie naprężenia to

$$\sigma_1 = \frac{-\left(B\sqrt{3}(\alpha+1) + \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right) + \sqrt{\Delta}}{2C\sqrt{3}(\alpha^2+2\alpha+1)}\alpha, \tag{4.42}$$

gdzie α zmienia się w przedziale $\langle -\infty, \infty \rangle$. Graficzną reprezentacją kryterium BP jest zbiór punktów (σ_1, σ_2). W przypadku kryterium BP mamy do czynienia z krzywą zapisaną w postaci parametrycznej (4.37 – 4.39 i 4.40 – 4.42), przy czym parametrem jest α. Krzywą przedstawiono na rys. 4.8.



Rys. 4.9. Kryterium BP w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Uwzględniając równania 4.10 i 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego, decydującą o zniszczeniu materiału, jako funkcję gęstości energii odkształcenia objętościowego:

$$W_2 = \begin{cases} a\begin{pmatrix} A^2 - 2AB\sqrt{bW_1} - 2ACbW_1 + \\ + 2BC\sqrt{(bW_1)^3} + B^2bW_1 + C^2(bW_1)^2 \end{pmatrix}, & I_1 < 0 \\ a\begin{pmatrix} A^2 + 2AB\sqrt{bW_1} + 2ACbW_1 + \\ + 2BC\sqrt{(bW_1)^3} + B^2bW_1 + C^2(bW_1)^2 \end{pmatrix}, & I_1 \geq 0 \end{cases}, \qquad 4.43$$

gdzie

$$a = \frac{1+\nu}{E}, b = \frac{6E}{1-2\nu}. \qquad 4.44$$

W płaszczyźnie wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia postaciowego W_2 i gęstość energii odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia BP dla określonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30\ \mathrm{MPa}$, rozciąganie $f_t = 3\ \mathrm{MPa}$ i dwuosiowe ściskanie $f_{bc} = 33{,}6\ \mathrm{MPa}$, modułu Younga $E = 30e3\ \mathrm{MPa}$ oraz liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.9. Przedstawiono na nim również interpretację energetyczną kryterium BP. Krzywe różnią się tutaj nieco od krzywych DP. Zaznaczono również kilka charakterystycznych punktów dla dwuosiowego jednomiernego ściskania 23,6, 33,6, 43,6 MPa, jednoosiowego ściskania 20, 30, 40 MPa oraz jednoosiowego rozciągania naprężeniami 2, 3, 4 MPa. Punkty oznaczone na omawianym rysunku na czerwono wskazują przekroczenie nośności, zielone odpowiadają wartościom granicznym, a niebieskie reprezentują stany bezpieczne.

Kryterium Mroza (M)

Kryterium zniszczenia Mroza (Mróz 1972) określa elipsoidalną powierzchnię w złożonym stanie naprężenia. Kryterium to jest również stosowane do analizy numerycznej konstrukcji żelbetowych (Buyukozturk 1977). Uwzględniono w nim zarówno energię odkształcenia postaciowego, jak i energię odkształcenia objętościowego. Kryterium Mroza zapisujemy w następującej formie (Klisinski, Mróz 1988):

$$f(I_1, J_2) = (I_1 - A)^2 + BJ_2 - C = 0. \qquad 4.45$$

W celu identyfikacji trzech parametrów konstytutywnych: A, B i C należy użyć trzech punktów $(f_t, 0)$, $(-f_c, 0)$ oraz $(-f_{bc}, -f_{bc})$. Nie jest to jedyny wariant, gdyż istnieje możliwość identyfikacji parametrów A, B i C za pomocą innych wielkości, np. wytrzymałości na trójosiowe ściskanie czy rozciąganie. Wymaga się, aby powierzchnia określona równaniem 4.45 przechodziła przez trzy identyfikacyjne punkty. Po rozpisaniu równania 4.45 za pomocą naprężeń głównych otrzymujemy:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - A)^2 + \frac{B}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - C = 0. \qquad 4.46$$

Po uwzględnieniu trzech identyfikacyjnych punktów ostatecznie otrzymano układ równań:

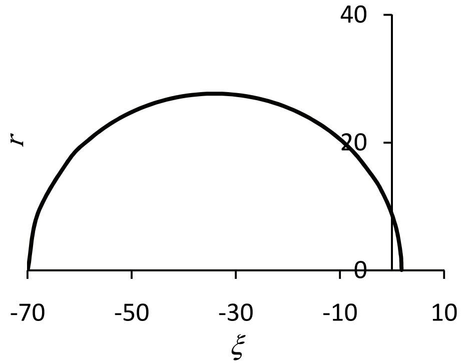
$$\begin{cases} (-f_c - A)^2 + B\dfrac{f_c^2}{3} - C = 0 \\ (f_t - A)^2 + B\dfrac{f_t^2}{3} - C = 0 \\ (-2f_{bc} - A)^2 + B\dfrac{f_{bc}^2}{3} - C = 0 \end{cases} . \qquad 4.47$$

Rozwiązaniem tego układu są trzy liczby (A, B, C):

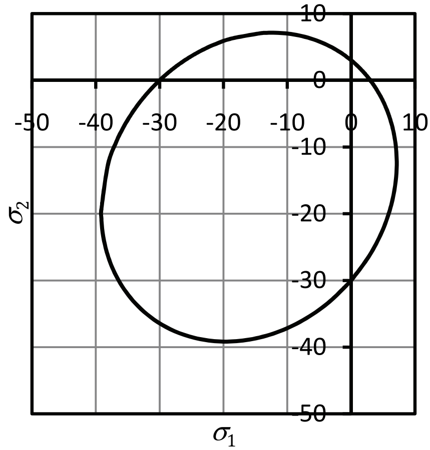
$$\begin{cases} A = \dfrac{3}{2}\dfrac{(f_c - f_t)f_{bc}^2}{\Omega} \\ B = -3\dfrac{3f_{bc}^2 + \Omega}{\Omega} \\ C = \dfrac{\Omega[4\Omega f_t - 12 f_t f_{bc}^2 (f_c - 2f_t) - 4\Omega f_t^2] + 9(f_c - f_t)^2 f_{bc}^4}{4\Omega^2} \end{cases} , \qquad 4.48$$

gdzie:

$$\Omega = (f_{bc} - f_c)(f_{bc} - f_t) - (f_c - f_t)f_{bc}. \qquad 4.49$$



Rys. 4.10. Przekrój południkowy (kryterium M)



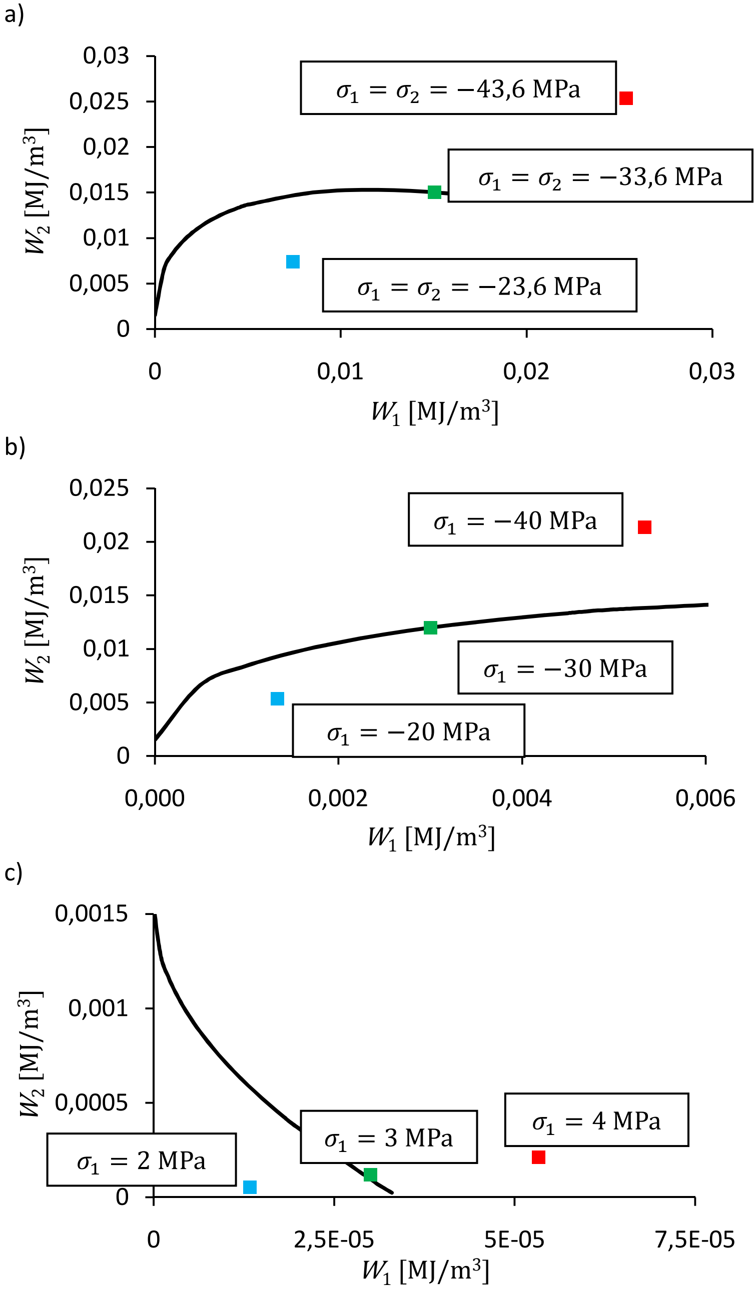
Rys. 4.11. Płaski stan naprężenia (kryterium M)

Założywszy, że $f_c = 30\,\mathrm{MPa}$, $f_t = 3\,\mathrm{MPa}$, a $f_{bc} = 33{,}6\,\mathrm{MPa}$, określono trzy parametry konstytutywne: $A = -58{,}96$, $B = 10{,}10$ i $C = 3863{,}82$. W przestrzeni południkowej kryterium o równaniu

$$r = \sqrt{\left[2C - 2\left(\sqrt{3}\xi - A\right)^2\right]/B}$$

przedstawiono na rys. 4.10. Przekrój dewiatorowy jest okręgiem. Istotne jest określenie kształtu w przestrzeni $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). Aby tego dokonać, należy zmienne σ_1, σ_2 równania 4.46 zamienić na ($\alpha\sigma_2$, σ_2, 0), analogicznie jak we wzorze 4.18. Wtedy otrzymujemy

$$\left[(\alpha+1)^2+\frac{B}{3}(\alpha^2-\alpha+1)\right]\sigma_2^2-2A(\alpha+1)\sigma_2+A^2-C=0. \tag{4.50}$$



Rys. 4.12. Kryterium M w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Pierwiastkami równania 4.50 są

$$\sigma_2 = \frac{2A(\alpha+1) \pm \sqrt{\Delta}}{2\left[(\alpha+1)^2 + \frac{B}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)\right]}, \tag{4.51}$$

gdzie

$$\Delta = 4A^2(\alpha+1)^2 - 4\left[(\alpha+1)^2 + \frac{B}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)\right](A^2 - C). \tag{4.52}$$

Drugie współrzędne punktów leżących na powierzchni zniszczenia w płaskim stanie naprężenia oblicza się ze wzoru

$$\sigma_1 = \frac{2A(\alpha+1) \pm \sqrt{\Delta}}{2\left[(\alpha+1)^2 + \frac{B}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)\right]}\alpha, \tag{4.53}$$

gdzie α zmienia się w przedziale $\langle -\infty, \infty \rangle$. Graficzną reprezentacją kryterium BP jest zbiór punktów (σ_1, σ_2). W przypadku kryterium M otrzymujemy krzywą zapisaną w postaci parametrycznej (4.51 – 4.53), przy czym parametrem jest α. Krzywą przedstawiono na rys. 4.11.

Uwzględniając równania 4.10 oraz 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego, decydującą o zniszczeniu materiału, jako funkcję gęstości energii odkształcenia objętościowego:

$$W_2 = \begin{cases} \frac{a}{B}\left[C - \left(\sqrt{bW_1} - A\right)^2\right] & I_1 \geq 0 \\ \frac{a}{B}\left[C - \left(-\sqrt{bW_1} - A\right)^2\right] & I_1 < 0 \end{cases}, \tag{4.54}$$

gdzie

$$a = \frac{1+\nu}{E}, b = \frac{6E}{1-2\nu}. \tag{4.55}$$

W płaszczyźnie wyznaczonej przez energię odkształcenia postaciowego W_2 i energię odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia M dla założonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30\ \mathrm{MPa}$, rozciąganie $f_t = 3\ \mathrm{MPa}$ i dwuosiowe ściskanie $f_{bc} = 33{,}6\ \mathrm{MPa}$, modułu Younga $E = 30e3\ \mathrm{MPa}$ oraz liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.12. Przedstawiono na nim także interpretację energetyczną kryterium M. Krzywe różnią się tutaj nieco od krzywych DP i BP. Zaznaczono również kilka charakterystycznych punktów dla dwuosiowego ściskania 23,6, 33,6, 43,6 MPa, jednoosiowego ściskania 20, 30, 40 MPa oraz jednoosiowego rozciągania 2, 3, 4 MPa.

Kryterium Willama-Wernkego (WW)

Kryterium to (Willam, Warnke 1975) dla betonu w trójosiowym stanie naprężenia przyjmuje postać:

$$f(I_1, J_2, J_3) = \frac{1}{3z}\frac{I_1}{f_c} + \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{r(\theta)}\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} - 1\,, \tag{4.56}$$

gdzie

$$r(\theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\sqrt{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_c r_t}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2}, \tag{4.57}$$

a

$$\begin{gathered} \theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\sqrt[2]{J_2^3}}\right), \\ \cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}}. \end{gathered} \tag{4.58}$$

Parametry r_c, r_t i z wyznacza się za pomocą trzech punktów identyfikacyjnych, tak jak we wcześniejszych przypadkach. Wartości niezmienników I_1, J_2 oraz θ odpowiadające trzem punktom identyfikacyjnym: $(f_t, 0, 0)$, $(-f_c, 0, 0)$ oraz $(-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$ przedstawiono w tab. 4.1.

Tab. 4.1. Dane do identyfikacji

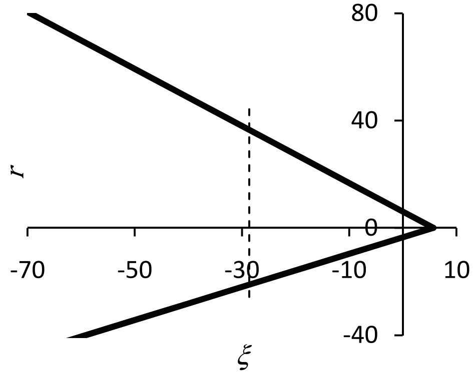
Punkt	I_1	J_2	θ	$r(\theta)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (f_t, 0, 0)$	f_t	$\frac{f_t^2}{3}$	0^0	r_t
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_c, 0, 0)$	$-f_c$	$\frac{f_c^2}{3}$	60^0	r_c
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$	$-2f_{bc}$	$\frac{f_{bc}^2}{3}$	0^0	r_t

Po wprowadzeniu danych z tab. 4.1 do równania 4.56 otrzymano układ równań:

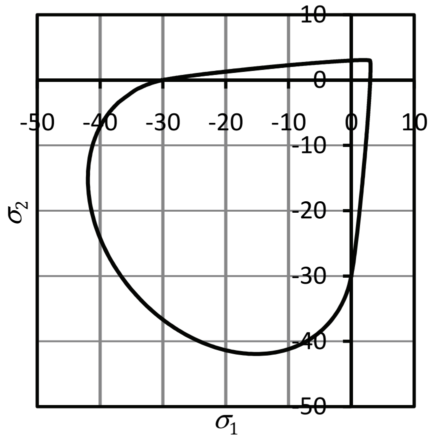
$$\begin{cases} \frac{1}{3z}\frac{f_t}{f_c} + \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{r_t}\frac{\sqrt{\frac{f_t^2}{3}}}{f_c} - 1 = 0 \\ \frac{1}{3z}\frac{-f_c}{f_c} + \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{r_c}\frac{\sqrt{\frac{f_t^2}{3}}}{f_c} - 1 = 0 \\ \frac{1}{3z}\frac{-2f_{bc}}{f_c} + \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{r_t}\frac{\sqrt{\frac{f_{bc}^2}{3}}}{f_c} - 1 = 0 \end{cases}. \tag{4.59}$$

Rozwiązaniem tego układu są trzy liczby postaci:

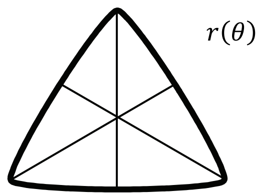
$$\begin{cases} r_t = \sqrt{\frac{6}{5}\left[\frac{f_{bc}f_t}{f_c(2f_{bc}+f_t)}\right]} \\ r_c = \sqrt{\frac{6}{5}\left[\frac{f_{bc}f_t}{3f_{bc}f_t+f_c(f_{bc}-f_t)}\right]} \\ z = \frac{f_{bc}f_t}{f_c(f_{bc}-f_t)} \end{cases}. \tag{4.60}$$



Rys. 4.13. Przekrój południkowy (kryterium WW)



Rys. 4.14. Płaski stan naprężenia (kryterium WW)



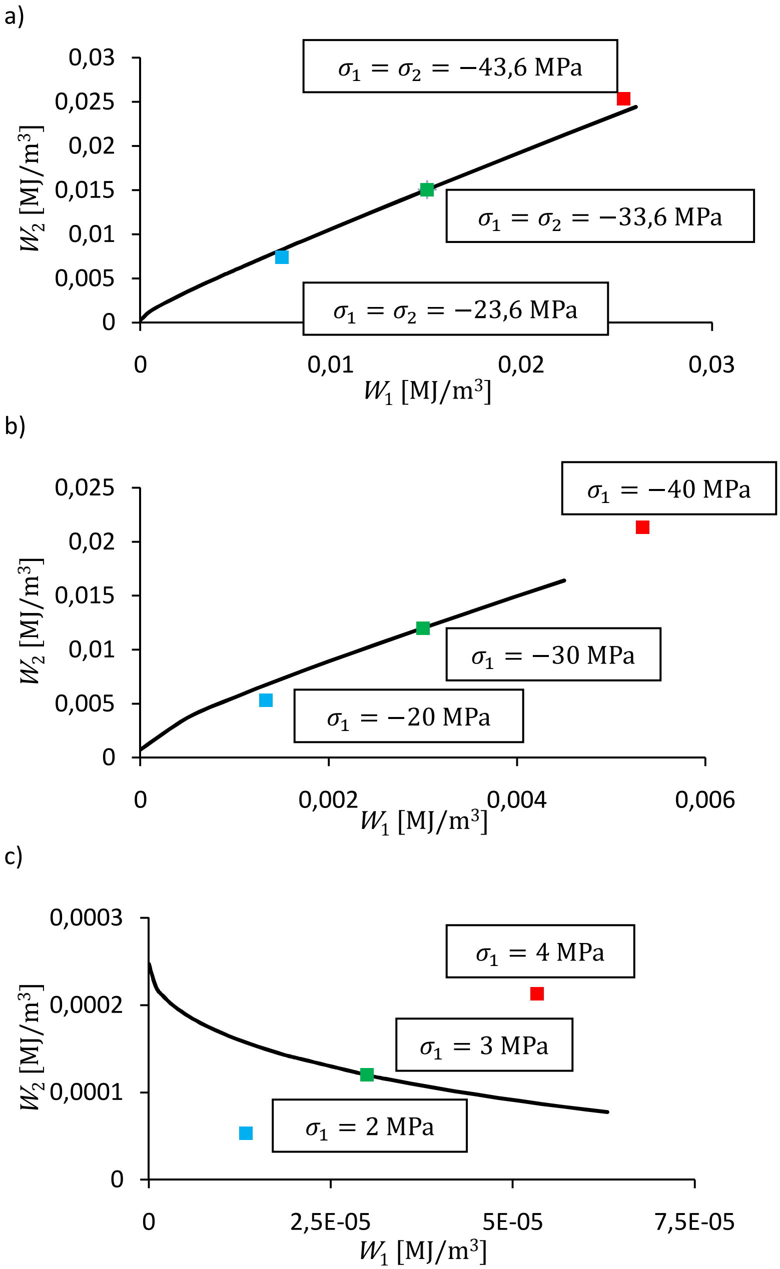
Rys. 4.15. Przekrój dewiatorowy (kryterium WW)

Założywszy, że $f_c = 30$ MPa, $f_t = 3$ MPa, a $f_{bc} = 33{,}6$ MPa, określono trzy parametry konstytutywne: $r_t = 0{,}0524316$, $r_c = 0{,}090479$ i $z = 0{,}1098039$. W przestrzeni południkowej kryterium przedstawiono na rys. 4.13. Równanie południka ściskanego ma postać:

$$r = \sqrt{5}f_c r_c - \sqrt{15}r_c/(3z)\,\xi,$$

a południka rozciąganego:

$$r = \sqrt{5} f_c r_t - \sqrt{15} r_t/(3z)\ \xi.$$



Rys. 4.16. Kryterium WW w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Przekrój dewiatorowy przedstawiono na rys. 4.15. Istotne jest określenie kształtu w przestrzeni $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). W tym celu należy rozpisać trzy niezmienniki (I_1, J_2, J_3) w równaniu 4.56 za pomocą naprężeń głównych, uwzględniając również równania 4.57 – 4.58. Następnie zmienne σ_1, σ_2 należy zamienić na $\alpha\sigma_2$, σ_2. Wtedy otrzymujemy:

$$\frac{(\alpha+1)}{3zf_c}\sigma_2 + \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{1}{f_c r(\theta)}(\alpha^2 - \alpha + 1)|\sigma_2| = 1, \qquad 4.61$$

gdzie za $r(\theta)$ przyjęto wyrażenie 4.57, w którym również zamieniono zmienne σ_1, σ_2 na $\alpha\sigma_2$, σ_2:

$$\theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 2}{2\sqrt[2]{\alpha^2 - \alpha + 1^3}}\right). \qquad 4.62$$

Rozwiązaniem równania 4.61 są następujące punkty:

$$\begin{cases} \sigma_2 = \dfrac{1}{\left[\dfrac{(\alpha+1)}{3zf_c} \pm \sqrt{\dfrac{2}{15}}\dfrac{1}{f_c r(\theta)}(\alpha^2 - \alpha + 1)\right]} \\ \sigma_1 = \dfrac{1}{\left[\dfrac{(\alpha+1)}{3zf_c} \pm \sqrt{\dfrac{2}{15}}\dfrac{1}{f_c r(\theta)}(\alpha^2 - \alpha + 1)\right]}\alpha \end{cases}, \qquad 4.63$$

przy czym α zmienia się w przedziale $\langle -\infty, \infty \rangle$. Również w przypadku kryterium WW układ równań 4.63 przedstawia krzywą zapisaną w postaci parametrycznej. Krzywą pokazano na rys. 4.14. Uwzględniając równania 4.10 oraz 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego, decydującą o zniszczeniu materiału, jako funkcję gęstości energii odkształcenia objętościowego:

$$W_2 = \begin{cases} a\left[\dfrac{5}{2}f_c^2 r^2(\theta) - \dfrac{5}{3}\dfrac{f_c r^2(\theta)}{z}\sqrt{bW_1} + \dfrac{5}{18}\dfrac{r^2(\theta)}{z^2}\right], & I_1 \geq 0 \\ a\left[\dfrac{5}{2}f_c^2 r^2(\theta) + \dfrac{5}{3}\dfrac{f_c r^2(\theta)}{z}\sqrt{bW_1} + \dfrac{5}{18}\dfrac{r^2(\theta)}{z^2}\right], & I_1 < 0 \end{cases}, \qquad 4.64$$

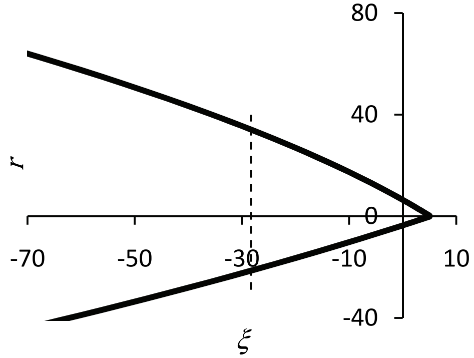
gdzie

$$a = \frac{1+\nu}{E} \text{ i } b = \frac{6E}{1-2\nu}. \qquad 4.65$$

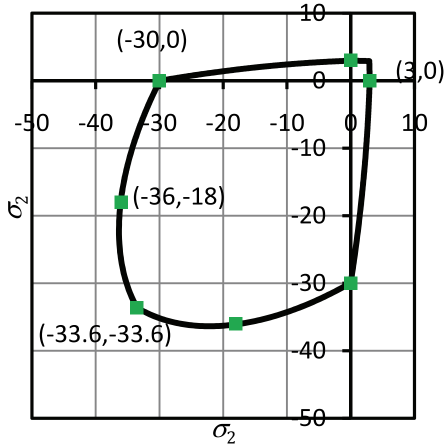
W płaszczyźnie wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia postaciowego W_2 i gęstość energii odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia WW dla określonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30$ MPa, rozciąganie $f_t = 3$ MPa i dwuosiowe ściskanie $f_{bc} = 33{,}6$ MPa, modułu Younga $E = 30e3$ MPa oraz liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.16. Pokazano na nim, jak interpretować energetycznie kryterium WW, oraz naniesiono na wykresy charakterystyczne punkty odpowiadające: dwuosiowemu ściskaniu 23,6, 33,6, 43,6 MPa, jednoosiowemu ściskaniu 20, 30, 40 MPa oraz jednoosiowego rozciąganiu 2, 3, 4 MPa. Gdy przekrój dewiatorowy jest krzywą złożoną z łuków elipsy, istotne jest uwzględnienie w równaniu 4.64 odpowiednich wartości funkcji $r(\theta)$, jak w tab. 4.1. Zgodnie z tym równaniem $r(\theta)$ zmienia się w przedziale $\langle r_t, r_c \rangle$.

Kryterium Podgórskiego (P)

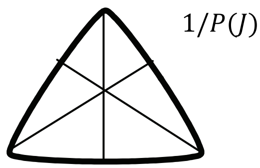
Istnieje wiele innych kryteriów zniszczenia betonu, opisywanych większą liczbą parametrów. Niżej zaprezentowano jedno pięcioparametrowe kryterium (Podgórski 1984 oraz Podgórski, Jonak 2004).



Rys. 4.17. Przekrój południkowy (kryterium P)



Rys. 4.18. Płaski stan naprężenia (kryterium P)



Rys. 4.19. Przekrój dewiatorowy (kryterium P)

Kryterium Podgórskiego zniszczenia betonu w trójosiowym stanie naprężenia przyjmuje postać (Podgórski 1984):

$$f(I_1, J_2, J_3) = \frac{1}{3} I_1 - A + BP(J) \sqrt{\frac{2}{3} J_2} + \frac{2}{3} C J_2 = 0\,, \tag{4.66}$$

gdzie

$$P(J) = \cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1} DJ - E\right), \tag{4.67}$$

a

$$J = \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}. \tag{4.68}$$

Parametry A, B, C, D i E wyznacza się za pomocą pięciu punktów identyfikacyjnych. Te punkty to: $(f_t, 0, 0)$, $(-f_c, 0, 0)$, $(-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$, $(-f_{cc}, -1/2\, f_{cc}, 0)$ i (f_{tt}, f_{tt}, f_{tt}). Wartości niezmienników odpowiadające tym punktom przedstawiono w tab. 4.2.

Tab. 4.2. Dane do identyfikacji

Punkt	I_1	J_2	J	$P(J)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (f_t, 0, 0)$	f_t	$\frac{f_t^2}{3}$	1	$\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} D - E\right)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_c, 0, 0)$	$-f_c$	$\frac{f_c^2}{3}$	-1	$\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} -D - E\right)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$	$-2f_{bc}$	$\frac{f_{bc}^2}{3}$	1	$\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} D - E\right)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_{cc}, -1/2\, f_{cc}, 0)$	$-\frac{3}{2}f_{cc}$	$\frac{1}{4}f_{cc}^2$	0	$\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} 0 - E\right)$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (f_{tt}, f_{tt}, f_{tt})$	$3f_{tt}$	0	-	-

Układ równań, którego rozwiązanie prowadzi do identyfikacji pięciu parametrów, ma postać:

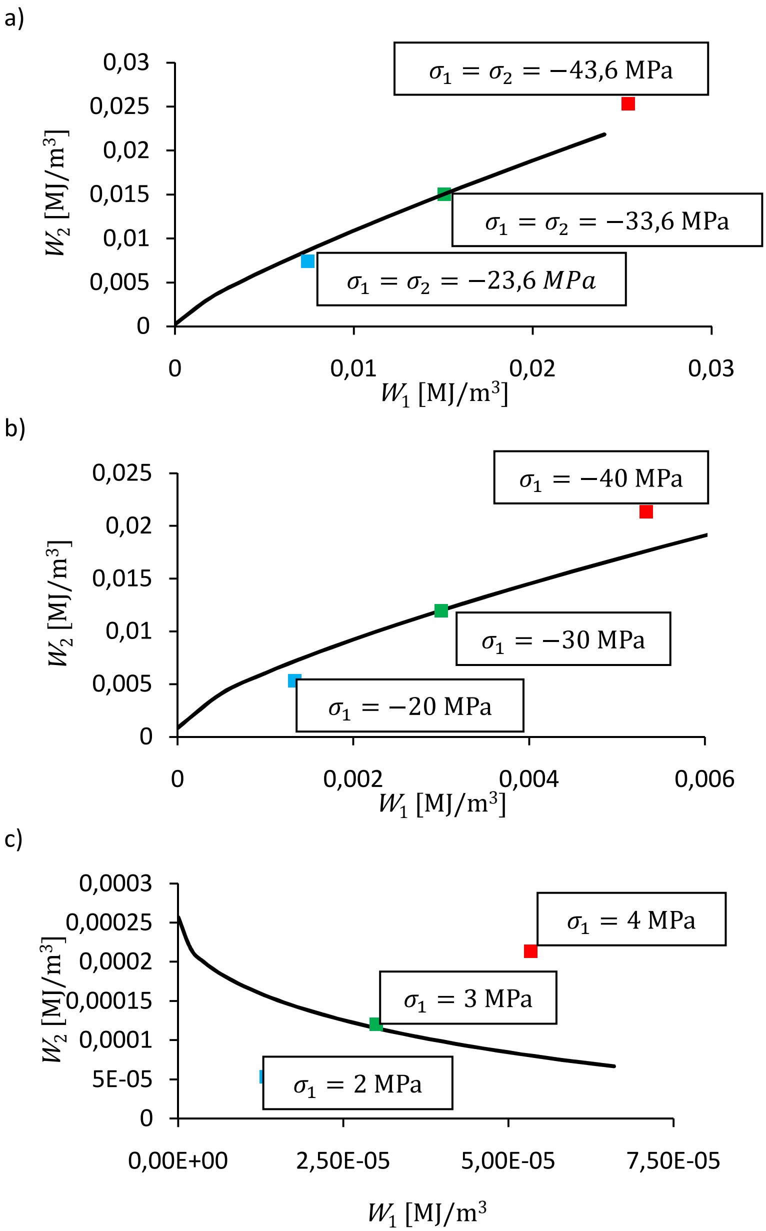
$$\begin{cases} \frac{1}{3}f_t - A + B\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} D - E\right)\frac{\sqrt{2}}{3}f_t + \frac{2}{3}C\frac{f_t^2}{3} = 0 \\ -\frac{1}{3}f_c - A + B\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} -D - E\right)\frac{\sqrt{2}}{3}f_c + \frac{2}{3}C\frac{f_c^2}{3} = 0 \\ -\frac{2}{3}f_{bc} - A + B\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} D - E\right)\frac{\sqrt{2}}{3}f_{bc} + \frac{2}{3}C\frac{f_{bc}^2}{3} = 0 \\ -\frac{1}{2}f_{cc} - A + B\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} 0 - E\right)\frac{1}{\sqrt{6}}f_{cc} + \frac{2}{3}C\frac{f_{cc}^2}{4} = 0 \\ f_{tt} - A = 0 \end{cases} \tag{4.69}$$

Powyższy układ rozwiązujemy iteracyjnie metodą Newtona. Założywszy, że $f_c = 30\ \mathrm{MPa}$, $f_t = 3\ \mathrm{MPa}$, $f_{bc} = 33{,}6\ \mathrm{MPa}$, $f_{cc} = 36\ \mathrm{MPa}$, a $f_{tt} = 3\ \mathrm{MPa}$, określono pięć parametrów konstytutywnych: $A = 3$, $B = 1{,}4276$, $C = 0{,}0112$, $D = 1$ i $E = 0{,}03902$. W przestrzeni południkowej kryterium przedstawiono na rys. 4.17. Oba południki, kolejno ściskany i rozciągany, opisano równaniami:

$$r = \sqrt{5}f_c r_c - \sqrt{15}r_c/(3z)\ \xi$$

oraz

$$r = \sqrt{5}f_c r_t - \sqrt{15}r_t/(3z)\ \xi.$$



Rys. 4.20. Kryterium P w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Przekrój dewiatorowy przedstawiono na rys. 4.19. Istotne jest określenie kształtu w przestrzeni $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). W tym celu należy rozpisać trzy niezmienniki ($I_1,\ J_2,\ J_3$) w równaniu 4.66 za pomocą naprężeń głównych, uwzględniając również równania 4.67 – 4.68. Następnie zmienne σ_1, σ_2 należy zamienić na $\alpha\sigma_2$, σ_2. Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)\sigma_2^2+\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)+\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]\sigma_2-A=0, \quad \sigma_2\geq 0 \\ \frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)\sigma_2^2+\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)-\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]\sigma_2-A=0, \quad \sigma_2<0 \end{cases}, \qquad 4.70$$

gdzie za $P(J)$ przyjęto wyrażenie 4.67, w którym zamieniono zmienne σ_1, σ_2 na $\alpha\sigma_2$, σ_2:

$$\theta=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{2\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+2}{2\sqrt[2]{\alpha^2-\alpha+1^3}}\right). \qquad 4.71$$

Rozwiązaniem równania 4.70 są następujące punkty:

$$\begin{cases} \sigma_2=\dfrac{-\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)+\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]\pm\Delta_1}{2\frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)} \\ \sigma_2=\dfrac{-\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)+\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]\pm\Delta_2}{2\frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)} \end{cases}, \qquad 4.72$$

przy czym α zmienia się w przedziale $\langle-\infty,\infty\rangle$, a Δ_1 i Δ_2 mają postać:

$$\Delta_1=\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)+\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]^2+4A\left(\frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)\right),$$
$$\Delta_2=\left[\frac{1}{3}(\alpha+1)-\frac{BP(J)}{3}\sqrt{2(\alpha^2-\alpha+1)}\right]^2+4A\left(\frac{2}{9}C(\alpha^2-\alpha+1)\right).$$

Graficzną reprezentacją kryterium P jest zbiór punktów (σ_1,σ_2), leżących na krzywej zapisanej w postaci parametrycznej (4.63), gdzie parametrem jest α. Krzywą przedstawiono na rys. 4.18. Kryterium P ma cztery punkty identyfikacyjne. Wszystkie znajdują się w płaskim stanie naprężenia, dlatego krzywa na rys. 4.18 dobrze oddaje dane doświadczalne (Kupfer, Hilsdo, Rusch 1969). Uwzględniając równania 4.10 oraz 4.11, określono gęstość energii odkształcenia postaciowego, decydującą o zniszczeniu materiału, jako funkcję gęstości energii odkształcenia objętościowego:

$$W_2=\left(\frac{-BP(J)\sqrt{\frac{2}{3}a}+\sqrt{\Delta}}{\frac{4}{3}Ca}\right)^2, \qquad 4.73$$

gdzie:

$$a=\frac{E}{1+\nu}, b=\frac{6E}{1-2\nu}, \qquad 4.74$$

a Δ ma postać:

$$\Delta = \begin{cases} \frac{2}{3}aB^2P^2(J) - 4\left(\frac{2}{3}Ca\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{bW_1} - A\right) & I_1 \geq 0 \\ \frac{2}{3}aB^2P^2(J) - 4\left(\frac{2}{3}Ca\right)\left(-\frac{1}{3}\sqrt{bW_1} - A\right) & I_1 < 0 \end{cases}. \qquad 4.75$$

W płaszczyźnie wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia postaciowego W_2 i gęstość energii odkształcenia objętościowego W_1 kryterium zniszczenia P dla określonej wcześniej wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30\,\mathrm{MPa}$, rozciąganie $f_t = 3\,\mathrm{MPa}$, dwuosiowe równomierne ściskanie $f_{bc} = 33{,}6\ MPa$, trójosiowe rozciąganie $f_{tt} = 3\,\mathrm{MPa}$ i dwuosiowe ściskanie $f_{cc} = 36\,\mathrm{MPa}$ oraz modułu Younga $E = 30e3\,\mathrm{MPa}$ i liczby Poissona $\nu = 0{,}2$ zaprezentowano na rys. 4.20. Pokazano na nim, jak interpretować energetycznie kryterium P, oraz naniesiono na wykresy charakterystyczne punkty odpowiadające: dwuosiowemu ściskaniu 23,6, 33,6, 43,6 MPa, jednoosiowemu ściskaniu 20, 30, 40 MPa oraz jednoosiowemu rozciąganiu 2, 3, 4 MPa. Gdy przekrój dewiatorowy jest krzywą, istotne jest uwzględnienie w równaniu 4.73 odpowiednich wartości funkcji $P(J)$, zgodnie z tab. 4.2.

Kryterium energetyczne Burzyńskiego (B)

Oprócz wyżej omówionych kryteriów, w których zaproponowano interpretację energetyczną, tutaj zaprezentowano koncepcję Burzyńskiego. W hipotezie zmiennej gęstości energii odkształcenia objętościowo-postaciowego założono, że o zniszczeniu decyduje gęstość energii odkształcenia postaciowego powiększona o pewną część gęstości energii odkształcenia objętościowego (Burzyński 1928). Matematyczną formą tak postawionej hipotezy jest równanie:

$$\phi_f + \eta\phi_v = K, \qquad 4.76$$

gdzie

$$\phi_f = W_2 = \frac{1+\nu}{E}J_2, \qquad \phi_v = W_1 = \frac{1-2\nu}{6E}I_1^2 \qquad 4.77$$

są odpowiednio energią odkształcenia postaciowego i objętościowego, a η oznacza pewną dopasowującą funkcję aksjatora stanu naprężenia w postaci zaproponowanej przez Burzyńskiego:

$$\eta = \eta(W_1) = \omega + \frac{\delta}{3p} = \omega + \frac{\delta}{I_1} = \omega + \frac{\delta}{\pm\sqrt{\frac{6E}{1-2\nu}W_1}}, \qquad 4.78$$

gdyż

$$p = \frac{I_1}{3}. \qquad 4.79$$

Zatem równanie 4.76 po uwzględnieniu zależności 4.78 przyjmuje postać:

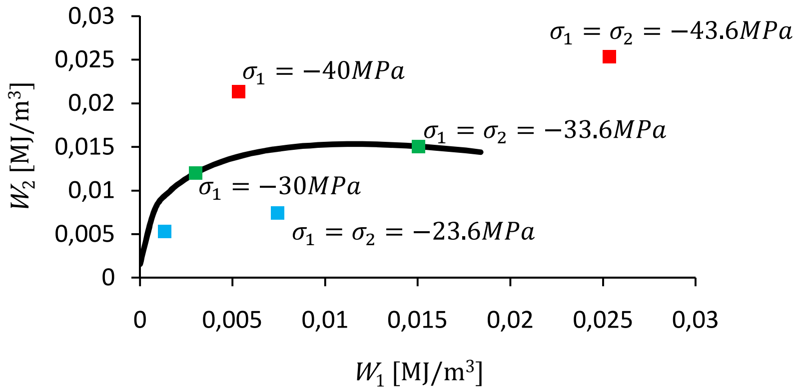
$$W_2 + \left(\omega + \frac{\delta}{\pm\sqrt{\frac{6E}{1-2\nu}W_1}}\right)W_1 = K. \qquad 4.80$$

Znak „+” występuje w powyższym równaniu dla $I_1 \geq 0$, a „–” dla $I_1 < 0$. Trzy parametry: ω, δ i K identyfikujemy za pomocą testów laboratoryjnych, podobnie jak w przypadku kryteriów BP, M i WW. Ostatecznie kryterium Burzyńskiego może być określone równaniem:

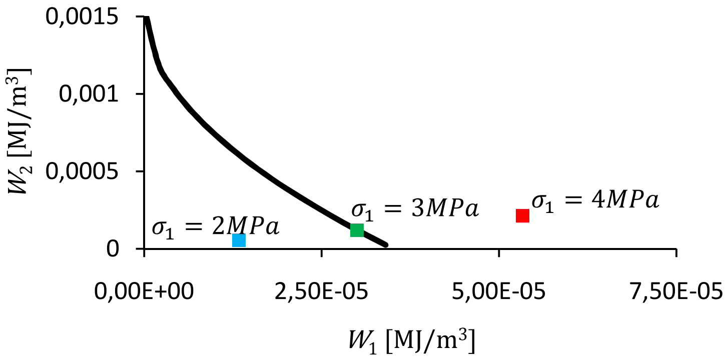
$$W_2 = K - \omega W_1 \mp \delta\sqrt{\frac{1-2\nu}{6E}W_1}. \qquad 4.81$$

Parametry ω, δ i K wyznacza się za pomocą trzech punktów identyfikacyjnych. Te punkty to: $(f_t, 0, 0)$, $(-f_c, 0, 0)$ i $(-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$. W tabeli 4.3 znajdują się wszystkie dane potrzebne do skonstruowania układu równań, którego rozwiązaniem są trzy parametry powierzchni zniszczenia.

a)



b)



Rys. 4.21 Kryterium B w płaszczyźnie $W_2 - W_1$

Tab. 4.3. Dane do identyfikacji

Punkt	I_1	J_2	W_1	W_2
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (f_t, 0, 0)$	f_t	$\frac{f_t^2}{3}$	$\frac{1-2\nu}{6E} f_t^2$	$\frac{1+\nu}{E}\frac{f_t^2}{3}$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_c, 0, 0)$	$-f_c$	$\frac{f_c^2}{3}$	$\frac{1-2\nu}{6E} f_c^2$	$\frac{1+\nu}{E}\frac{f_c^2}{3}$
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$	$-2f_{bc}$	$\frac{f_{bc}^2}{3}$	$\frac{1-2\nu}{6E} 4f_{bc}^2$	$\frac{1+\nu}{E}\frac{f_{bc}^2}{3}$

Układ równań, który należy rozwiązać, przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} \frac{1+\nu}{E}\frac{f_t^2}{3} = K - \omega\frac{1-2\nu}{6E} f_t^2 + \delta\sqrt{\left(\frac{1-2\nu}{6E}\right)^2 f_t^2} \\ \frac{1+\nu}{E}\frac{f_c^2}{3} = K - \omega\frac{1-2\nu}{6E} f_c^2 - \delta\sqrt{\left(\frac{1-2\nu}{6E}\right)^2 f_c^2} \\ \frac{1+\nu}{E}\frac{f_{bc}^2}{3} = K - \omega\frac{1-2\nu}{6E} 4f_{bc}^2 - \delta\sqrt{\left(\frac{1-2\nu}{6E}\right)^2 4f_{bc}^2} \end{cases} . \quad 4.82$$

Rozwiązaniem tego układu równań są trzy liczby:

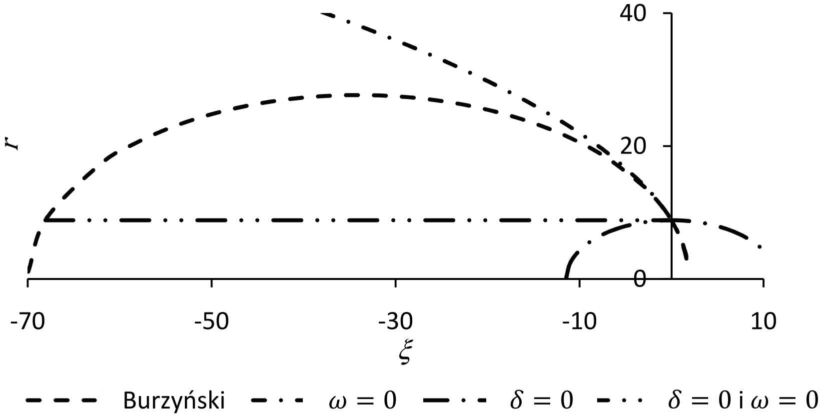
$$\begin{cases} \omega = -\frac{1}{3}\frac{a(-f_{bc}^2 - 2f_t f_{bc} + f_t f_c + 2f_c f_{bc})}{b(-4f_{bc}^2 + 2f_c f_{bc} - 2f_t f_{bc} + f_t f_c)} \\ \delta = -\frac{a f_{bc}^2 (f_c - f_t)}{b(-4f_{bc}^2 + 2f_c f_{bc} - 2f_t f_{bc} + f_t f_c)} \\ K = \frac{a f_c f_t f_{bc}^2}{-4f_{bc}^2 + 2f_c f_{bc} - 2f_t f_{bc} + f_t f_c} \end{cases} , \quad 4.83$$

gdzie

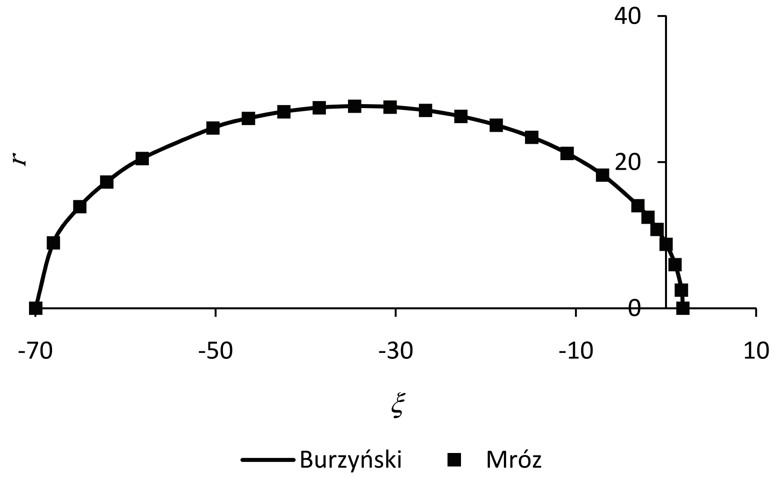
$$a = \frac{1+\nu}{E}, b = \frac{1-2\nu}{6E}. \quad 4.84$$

Założywszy, że $f_c = 30$ MPa, $f_t = 3$ MPa i $f_{bc} = 33{,}6$ MPa, określono trzy parametry konstytutywne: $\omega = 1{,}1878$, $\delta = 140{,}069$, $K = 0{,}001556$. Energetyczne kryterium Burzyńskiego (Burzyński 1928 oraz Pęcherski 2008) jest zdefiniowane w formie odpowiadającej prezentowanym wcześniej interpretacjom energetycznym kryteriów HMH, DP, BP, M, WW i P. Tak jak w poprzednich przypadkach istnieje zatem możliwość pokazania zmiennej gęstości energii odkształcenia objętościowo-postaciowego w przestrzeni $W_2 - W_1$(patrz rys. 4.21). Istotne jest to, że po przyjęciu pewnych uproszczeń kryterium B ulega redukcji do innych kryteriów. Kryterium B w przestrzeni $r - \xi$ przedstawiono na rys. 4.22 dla zerowych parametrów ω lub δ lub obu. Wyzerowanie K prowadzi do kryteriów zniszczenia materiałów bez kohezji. Dla zidentyfikowanych wcześniej parametrów $\omega = 1{,}1878$, $\delta = 140{,}069$, $K = 0{,}001556$ przekrój południkowy jest elipsą o równaniu:

$$r = \sqrt{\frac{2}{a}\left(K - 3b\omega\xi^2 - \sqrt{3}b\delta\xi\right)}. \qquad 4.85$$



Rys. 4.22. Kryterium B w płaszczyźnie $r - \xi$



Rys. 4.23. Porównanie kryteriów B i M w płaszczyźnie $r - \xi$

Gdy $\omega = 0$, w przekroju południkowym występuje parabola kwadratowa. Gdy $\delta = 0$, w przekroju południkowym występuje elipsa, tak samo jak w kryterium B, tyle że o środku w początku układu współrzędnych. Gdy zarówno $\omega = 0$, jak i $\delta = 0$, kryterium Burzyńskiego sprowadza się do kryterium HMH. Dokładnie wszystkie możliwe przypadki są omówione w oryginalnej pracy doktorskiej Burzyńskiego, a także w literaturze współczesnej (Pęcherski 2008). Ze względu na już wcześniej określony kształt elipsy kryterium B (Burzyński 1928) ciekawe jest porównanie B z kryterium M (Mróz 1972) (rys. 4.23). Kryteria te pokrywają się dla identycznych punktów identyfikacyjnych.

4.3. Opis matematyczny betonu plastycznego ze zniszczeniem

Prawidłowy opis zniszczenia betonu jest podstawowym zagadnieniem, w szczególności gdy rozważa się pracę betonu w konstrukcji poddanej zaawansowanym deformacjom. Na skutek rozwoju mikrorys istniejących w betonie dochodzi do osłabienia materiału. To zjawisko na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych definiuje się jako uszkodzenie. W opisie matematycznym macierz sztywności stycznej przestaje być dodatnio określona. Uszkodzenie pojawia się np. w wyniku rozciągania betonu, gdy na skutek rozwoju uszkodzenia macierz sztywności stycznej jest ujemnie określona, co prowadzi do lokalizacji odkształceń.
Z matematycznego punktu widzenia dochodzi do zmiany typu cząstkowych równań różniczkowych (z eliptycznego na hiperboliczny) opisujących proces, co prowadzi do tego, że problem jest źle postawiony. W konsekwencji otrzymane rozwiązanie w sposób patologiczny zależy od gęstości zastosowanej dyskretyzacji (Pietruszczak, Mróz 1981). Aby temu zapobiec, stosuje się różne metody regularyzacji: na poziomie sformułowania matematycznego albo na poziomie sformułowania numerycznego. Do pierwszej grupy metod regularyzacji należą modele lepko-plastyczne (*strain rate-dependent*), w których stan naprężenia zależy również od prędkości deformacji (Perzyna 1966; Łodygowski 1996 oraz Wang, Sluys, de Borst 1997). Modele te są stosowane głównie w dynamice. Ich użycie do regularyzacji zjawisk quasi-statycznych jest ograniczone (Hibbitt, Karlsson, Sorensen, 2005). Do grupy tej należą również modele Cosseratów i mikropolarne, stosowane do opisu gruntów i ośrodków sypkich (Tejchman 1997; Tejchman, Gudehus 2001). Do modelowania zniszczenia w betonie używa się również modeli nielokalnych (Pijaudier-Cabot, Bažant, Tabbara 1988 oraz Bobinski, Tejchman, 2006) oraz tzw. modeli wyższego rzędu, czyli gradientowych (Geers, de Borst, Brekelmans, Peerlings 1998; Pamin 1994 oraz 2004). Nielokalne modele wprowadzają funkcję uśredniającą (np. funkcję Gaussa), która pozwala przeliczyć lokalne zmienne na nielokalne, zgodnie z określonymi wagami. Istnieje możliwość regularyzacji na poziomie sformułowania numerycznego przez wprowadzenie w sposób jawny szerokości strefy lokalizacji deformacji plastycznych do elementu skończonego (Pietruszczak, Mróz 1981). Dodatkowo stosuje się automatyczne zagęszczanie siatki elementów skończonych (*remeshing*), na podstawie lokalnych błędów spowodowanych dużymi gradientami zmiennych wewnętrznych. W celu regularyzacji problemu wprowadza się także nieciągłość pola przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego (Melenk, Babuska 1996 oraz Belytschko, Black 1999). Wszystkie wymienione metody regularyzacji wprowadzają do modelu materiału pewną wewnętrzną charakterystyczną skalę długości, która stanowi informację o szerokości strefy lokalizacji odkształceń. Dalej w tym podrozdziale zaprezentowano model betonu plastycznego ze zniszczeniem (Lubliner, Oliver,

Oller, Oñate 1989 oraz Hilleborg, Modeer, Petersson 1976) oparty na mechanice pękania. Do opisu zniszczenia w modelu tym wykorzystano miarę skalarną. Przedstawiono również sposób identyfikacji niezbędnych parametrów konstytutywnych oraz kilka zagadnień początkowo-brzegowych (patrz. podrozdziały: 4.4, 4.5 i 4.6).

Model betonu plastycznego ze zniszczeniem

Numeryczna analiza problemu początkowo-brzegowego z lokalizacją zniszczenia wymaga kompleksowego, konstytutywnego modelowania materiału. W modelu tym skalarny parametr zniszczenia jest używany do modelowania zniszczenia betonu oddzielnie podczas ściskania i rozciągania. Skalarnego opisu zniszczenia materiału (Kachanow 1958) początkowo używano do opisu zjawiska pełzania. Podstawowym zagadnieniem w analizie numerycznej konstrukcji betonowych jest prawidłowe określenie mechanizmu zniszczenia konstrukcji i jej nośności. Aby tego dokonać, należy zidentyfikować parametry konstytutywne modelu na podstawie eksperymentów laboratoryjnych.
Równanie konstytutywne materiału ze skalarnym parametrem zniszczenia przedstawia się następująco (Kachanow 1958 oraz Lubliner, Oliver, Oller, Oñate 1989):

$$\sigma = (1-d)D_0^{\mathrm{el}}:\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{pl}}\right) = D^{\mathrm{el}}:\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{pl}}\right), \qquad 4.86$$

gdzie σ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego, d skalarnym parametrem zniszczenia (degradacji sztywności), ε tensorem odkształceń, D_0^{el} początkowym tensorem sprężystej sztywności konstytutywnej, $D^{\mathrm{el}} = (1-d)D_0^{\mathrm{el}}$ zdegradowanym tensorem sprężystej sztywności konstytutywnej. Niezbędne jest określenie efektywnego tensora naprężenia na podstawie równania 4.86:

$$\overline{\sigma} = D_0^{\mathrm{el}}:\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{pl}}\right), \qquad 4.87$$

gdzie $\varepsilon^{\mathrm{pl}}$ jest tensorem odkształceń plastycznych, oraz ewolucję parametru zniszczenia d:

$$d = d\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right). \qquad 4.88$$

Zmienna d jest funkcją naprężeń efektywnych $\overline{\sigma}$ oraz ekwiwalentnych odkształceń plastycznych $\overline{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$. W modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem materiał jest początkowo izotropowy, ale podczas procesu na skutek rozwoju uszkodzenia dochodzi do anizotropii. Przy zaawansowanych deformacjach narastają dwa parametry zniszczenia d_c w wyniku ściskania i d_t w wyniku rozciągania.
Ostatecznie, tensor naprężeń Cauchy'ego σ jest proporcjonalny do tensora naprężeń efektywnych $\overline{\sigma}$, a współczynnikiem proporcjonalności jest $(1-\ d)$, zgodnie z regułą:

$$\sigma = (1-d)\overline{\sigma}. \qquad 4.89$$

Zniszczenie materiału przy ściskaniu i rozciąganiu jest wyrażone niezależnie przez dwie zmienne $\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}$ i $\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}$, które opisują ekwiwalentne odkształcenia przy ściskaniu i rozciąganiu. Ewolucja tych zmiennych jest określona następująco:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} \\ \bar{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}} \end{bmatrix}, \dot{\bar{\varepsilon}}_R^{\mathrm{pl}} = h\left(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}. \tag{4.90}$$

Zarysowanie (w wyniku rozciągania) oraz zgniecenie (w wyniku ściskania) betonu są wyrażone przez wzrost zmiennej wzmocnienia (osłabienia). Zmienne $\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}$ i $\bar{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}$ pozwalają kontrolować ewolucję powierzchni obciążenia F oraz degradację sztywności materiału.
Powierzchnia obciążenia, jako funkcja naprężeń i efektywnych odkształceń plastycznych, wyznacza stan uszkodzenia. Stan naprężeń i odkształceń w nielepkim modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem musi spełniać warunek:

$$F\left(\sigma, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \leq 0. \tag{4.91}$$

Plastyczne płynięcie jest określone funkcją potencjału plastycznego $G(\sigma)$ i niestowarzyszonym prawem płynięcia w postaci:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \dot{\lambda}\frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma}. \tag{4.92}$$

Model materiału plastycznego ze zniszczeniem jest jedną z wielu możliwości modelowania betonu. Istotne jest wyznaczenie prawidłowych parametrów konstytutywnych, co pozwoli na prawidłowe (jakościowe i ilościowe) porównanie wyników numerycznych z eksperymentalnymi.

Powierzchnia obciążenia

Powierzchnia obciążenia (Lubliner, Oliver, Oller, Oñate 1989) używana w modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem ma postać:

$$F(\sigma) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta\,\langle\sigma_{\max}\rangle - \gamma\,\langle-\sigma_{\max}\rangle\right] - f_c. \tag{4.93}$$

Parametry modelu: α, β i γ decydują o kształcie powierzchni obciążenia w przestrzeni σ. Postać funkcji obciążenia zapewnia wygodną identyfikację tych parametrów. W przypadku dwuosiowego ściskania, któremu odpowiadają naprężenia główne $(-f_{bc}, -f_{bc}, 0)$, znikają z równania 4.93 człony z β i γ, gdyż zarówno $\langle\sigma_{\max}\rangle$, jak i $\langle-\sigma_{\max}\rangle$ są równe zeru, ponieważ $\sigma_{\max} = 0$ dla następującej definicji nawiasu Macauleya: $\langle * \rangle = 1/2\,(|*| + *)$. W tym przypadku pierwszy niezmiennik stanu naprężenia $I_1 = -2f_{bc}$, a drugi niezmiennik dewiatora stanu naprężenia $J_2 = f_{bc}^2/3$. Wtedy równanie 4.93 przyjmuje postać:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left[\sqrt{3\frac{f_{bc}^2}{3}} - 2\alpha f_{bc}\right] = f_c,$$

a po przekształceniach otrzymujemy zależność:

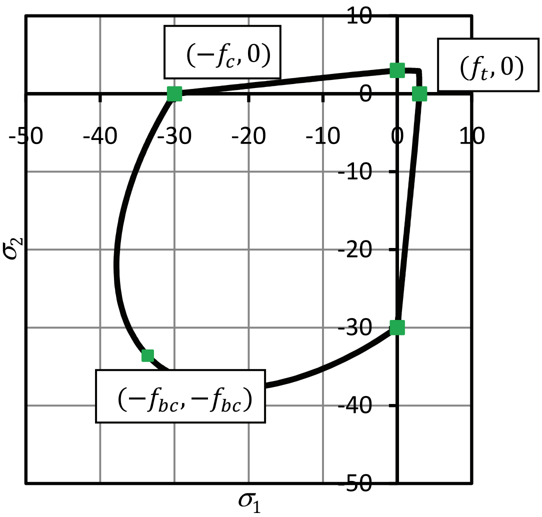
$$\alpha = \frac{(f_{bc}/f_c) - 1}{2(f_{bc}/f_c) - 1}. \tag{4.94}$$

Z zależności tej można wyznaczyć parametr α, na który ma wpływ stosunek wytrzymałości przy dwuosiowym ściskaniu f_{bc} do wytrzymałości przy jednoosiowym ściskaniu f_c.
Parametr β wyznaczamy w taki sposób, aby powierzchnia obciążenia przechodziła przez punkt $(f_t, 0{,}0)$. W tym przypadku $\langle\sigma_{\max}\rangle = \langle f_t\rangle = f_t$, a zatem równanie 4.93 przyjmuje postać:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left[\sqrt{3\frac{f_t^2}{3}} + \alpha f_t + \beta f_t\right] = f_c,$$

ponieważ pierwszy niezmiennik stanu naprężenia $I_1 = f_t$, a drugi niezmiennik dewiatora stanu naprężenia $J_2 = f_t^2/3$. W tej sytuacji możliwe jest obliczenie parametru β według następującej zależności:

$$\beta = \frac{f_c}{f_t}(1-\alpha) - (1-\alpha). \qquad 4.95$$



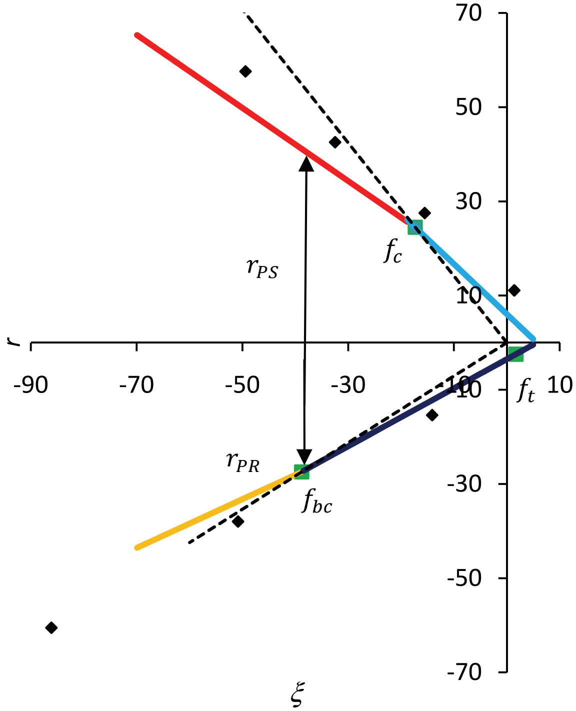
Rys. 4.24. Powierzchnia Lublinera w płaskim stanie naprężenia

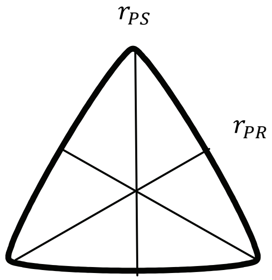
W płaskim stanie naprężenia tylko dwa parametry decydują o kształcie powierzchni obciążenia, a mianowicie α i β (rys. 4.24). Po podstawieniu do równania 4.93 niezmienników I_1 oraz J_2, odpowiadających punktowi $(-f_c, 0{,}0)$, okazuje się, że jest ono tożsamościowo spełnione. Parametr γ pojawia się tylko w trójosiowym stanie naprężenia, gdy $\sigma_{\max} < 0$. Z tego względu wpływ parametru γ na kształt powierzchni obciążenia należy przedstawić w płaszczyźnie południkowej. Z uwagi na odmienny charakter funkcji obciążenia 4.93, odbiegający od kryteriów omówionych w podrozdziale 4.2, na rysunku 4.25 przedstawiono kształt powierzchni obciążenia w przekroju południkowym w przestrzeni $r - \xi$. Najważniejsze są wyniki badań eksperymentalnych (Launay, Gachon 1971), które oznaczono symbolem ◆ na rys. 4.25. Widoczne są dwa południki: rozciągany PR, dla którego $r < 0$, oraz ściskany PS, dla którego $r > 0$. Istotne znaczenie ma wartość stosunku obu promieni (Lubliner, Oliver, Oller, Oñate 1989):

$$\rho = \frac{r_{PR}}{r_{PS}} \qquad \text{dla określonego} \quad \xi. \tag{4.96}$$

Do wyznaczenia ogólnych równań obu południków niezbędne jest określenie dla nich maksymalnych naprężeń głównych (Abbo, Sloan 1995) jako:

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(I_1 + 2\sqrt{3J_2}\right) & \text{dla} \quad r_{PR} \\ \frac{1}{3}\left(I_1 + 2\sqrt{3J_2}\right) & \text{dla} \quad r_{PS} \end{cases}. \tag{4.97}$$





Rys. 4.26. Przekrój dewiatorowy

Rys. 4.25. Przekrój południkowy powierzchni obciążenia

Teraz równania obu południków PS i PR są następujące:

$$r_{PR} = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{(1-\alpha)f_c - (\alpha + \gamma/3)\sqrt{3}\xi}{1 + 2\gamma/3} & \text{dla} \quad r < -\frac{\xi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{(1-\alpha)f_c - (\alpha + \beta/3)\sqrt{3}\xi}{1 + 2\beta/3} & \quad r \geq -\frac{\xi}{\sqrt{2}} \end{cases}, \tag{4.98}$$

$$r_{PS} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6}}{3}\dfrac{(1-\alpha)f_c - (\alpha + \gamma/3)\sqrt{3}\xi}{1+\gamma/3} & \text{dla} \quad r < -\dfrac{2\xi}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\dfrac{(1-\alpha)f_c - (\alpha + \beta/3)\sqrt{3}\xi}{1+\beta/3} & \phantom{\text{dla}} \quad r \geq -\dfrac{2\xi}{\sqrt{2}} \end{cases}. \qquad 4.99$$

Z analizy równania 4.93 wynika, że w związku z zastosowaniem nawiasu Macauleya niezbędne jest określenie równań południków w obu strefach, ściskanej i rozciąganej, dla dwóch przypadków: $\sigma_{\max} < 0$ oraz $\sigma_{\max} > 0$. Odpowiednie proste dzielące przestrzeń $r - \xi$ oznaczono na rys. 4.25 linią przerywaną. Dodatkowo na wykresie zamieszczono punkty identyfikacyjne (oznaczone symbolem ■). Dzięki temu sprawdzono poprawność obliczeń. Wszystkie trzy punkty leżą na odpowiednich południkach, jednak w strefie, na którą wpływ mają tylko parametry α oraz β. W strefie trójosiowego ściskania, gdy $\langle -\sigma_{\max} \rangle \neq 0$, w równaniu 4.96 zastosowano odpowiednie zależności 4.98 – 4.99 i określono parametr ρ jako

$$\rho = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3}. \qquad 4.100$$

Po przekształceniach otrzymano wzór:

$$\gamma = \frac{3(1-\rho)}{2\rho - 1}. \qquad 4.101$$

Zatem parametr γ wyznacza się przez globalne dopasowanie dwóch południków w strefie trójosiowego ściskania do wyników badań. Na rysunku 4.25 zaprezentowano wyniki testów trójosiowego ściskania (Launay, Gachon 1971 oraz Chen 1982). Wyniki te pozwalają określić parametr ρ, którego wartość w różnych badaniach laboratoryjnych wynosi od 0,64 do 0,8. Przekrój dewiatorowy przedstawiono na rys. 4.26. Zgodnie z powyższymi rozważaniami możliwe jest uwzględnienie w równaniu 4.93 ewolucji $F(\sigma)$ w zależności od $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$. W modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem wykonano to w następujący sposób:

- uzależniono parametr β od aktualnej wartości efektywnego naprężenia ściskającego $\bar{\sigma}_S$ i rozciągającego $\bar{\sigma}_R$, które są funkcjami odpowiednio $\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}$ i $\bar{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}$:

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}_S\left(\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}\right)}{\bar{\sigma}_R\left(\bar{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}\right).}(1-\alpha) - (1-\alpha);$$

- zastąpiono parametr f_c funkcją $\bar{\sigma}_S\left(\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}\right)$:

$$f_c = \bar{\sigma}_S\left(\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}\right).$$

Wszelkie rozważania nie tracą oczywiście na znaczeniu po tych zmianach i dopuszczeniu ewolucji powierzchni obciążenia. Obowiązują następujące zależności, które określają ekwiwalentne naprężenia dla zerowych odkształceń plastycznych:

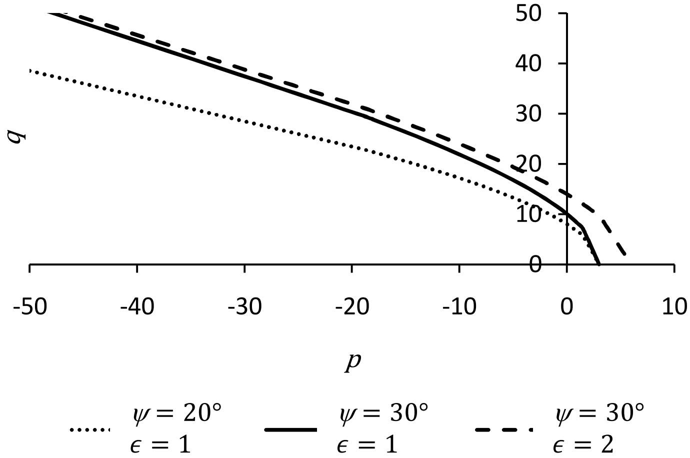
$$\bar{\sigma}_S\left(\bar{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} = 0\right) = f_c \qquad \text{oraz} \qquad \bar{\sigma}_R\left(\bar{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}} = 0\right) = f_t.$$

Powierzchnia potencjału plastycznego

W modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem zakłada się użycie niestowarzyszonego prawa płynięcia. Zatem niżej omówiono sposób identyfikacji parametrów ψ, ϵ powierzchni potencjału plastycznego G, czyli hiperbolicznej funkcji Druckera-Pragera w postaci:

$$G(\sigma) = \sqrt{(f_c - \epsilon f_t \operatorname{tg} \psi)^2 + q^2} + p \operatorname{tg} \psi - f_c = 0, \qquad 4.102$$

gdzie $p = \frac{1}{3} I_1$ jest efektywnym naprężeniem hydrostatycznym, a $q^2 = 3J_2$ ekwiwalentnym efektywnym naprężeniem HMH.



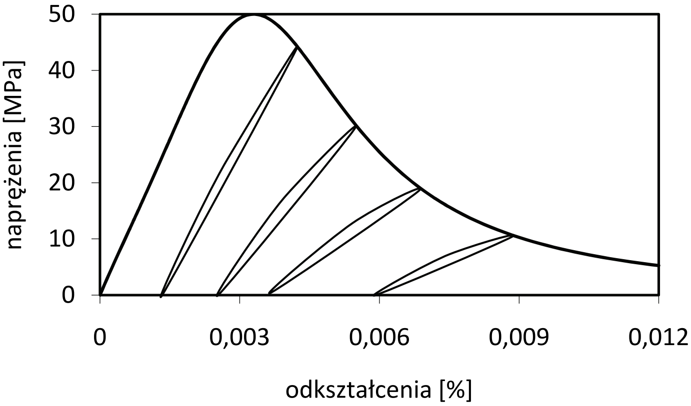
Rys. 4.27. Powierzchnia potencjału plastycznego

Identyfikacja obu parametrów ψ, ϵ odbywa się przez ich globalne dopasowanie do danych eksperymentalnych (Swanson, Green 1973) w płaszczyźnie $p - q$ za pomocą minimalizacji błędu kwadratowego (Jankowiak, Łodygowski 2005). Kształt krzywej w przekroju południkowym dla różnych wartości parametrów przedstawiono na rys. 4.27.

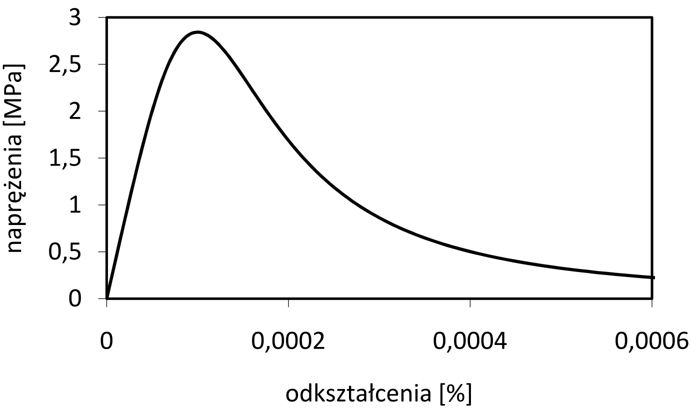
Identyfikacja parametrów konstytutywnych modelu

Wyżej w tym rozdziale zaprezentowano ogólne założenia modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem. Wyjaśniono również znaczenie parametrów konstytutywnych. W tym miejscu zostaną zidentyfikowane parametry materiałowe betonu klasy B50 na podstawie testów laboratoryjnych.

Najważniejszym eksperymentem, za pomocą którego określa się klasę betonu, jest test jednoosiowego ściskania. Odpowiednie krzywe $\sigma - \varepsilon$ przedstawiono na rys. 4.28 i 4.29. Dodatkowo, aby dopasować globalnie parametry ψ, ϵ powierzchni potencjału plastycznego w płaszczyźnie południkowej, użyto znanych wyników (Swanson, Green 1973). Są to wyniki testów trójosiowego ściskania (rys. 4.30), które stanowią superpozycję hydrostatycznego ściskania (p = 0,0, 6,9 i 13,8 MPa) oraz dodatkowego ściskania w jednym kierunku σ_{33}, aż do zniszczenia. Dodatkowo przy identyfikacji parametrów ψ, ϵ należy również skorzystać z krzywej Kupfera (patrz podrozdział 1.1).

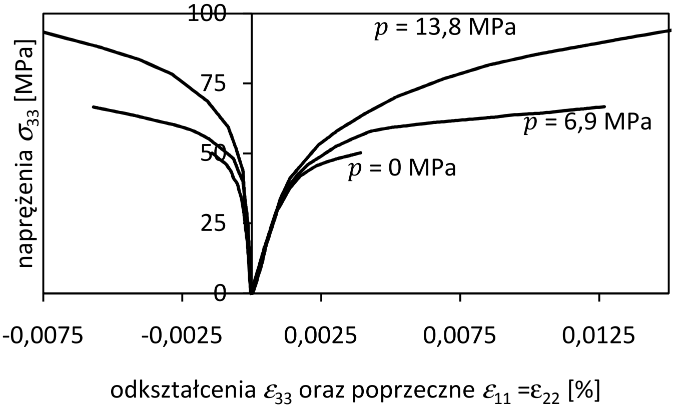


Rys. 4.28. Jednoosiowe ściskanie betonu – krzywa eksperymentalna (Jankowiak, Łodygowski, Szumigala 2004)



Rys. 4.29. Jednoosiowe rozciąganie betonu – krzywa eksperymentalna (Jankowiak, Łodygowski, Szumigala 2004)

Identyfikując parametry, założono, że beton zachowuje się liniowo-sprężyście do $0{,}6f_c$ podczas ściskania i do f_t podczas rozciągania. W zakresie sprężystym moduł Younga $E_0 = 18{,}5\ \mathrm{GPa}$, a liczba Poissona $\nu = 0{,}19$. Jest to wynikiem ilorazu obu współrzędnych w punkcie ● na Rys. 4.31, czyli naprężeń $30\ \mathrm{MPa}$ i odkształceń $0{,}001622$. Punkt ten jest granicą sprężystości. Od wartości naprężeń $30\ \mathrm{MPa}$ do wartości naprężeń $50\ \mathrm{MPa}$ beton podczas ściskania się wzmacnia. W tym zakresie ewentualne odciążenie odbywa się po prostej równoległej do czerwonego odcinka, którego współczynnik kierunkowy wynosi E_0. Definiując krzywą wzmocnienia (osłabienia) podczas ściskania, należy podać maksymalną liczbę punktów o współrzędnych $\left(\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}, \overline{\sigma}_S\right)$, gdzie $\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}$ jest niesprężystym odkształceniem ściskającym, które obliczamy przez odjęcie od odkształceń całkowitych $\overline{\varepsilon}_S$ części sprężystej $\overline{\varepsilon}_S^{\text{sp}}$. W momencie osiągnięcia naprężeń równych $50\ \text{MPa}$ beton podczas ściskania ulega osłabieniu, z czym łączy się również degradacja jego sztywności. Degradacja sztywności jest eksperymentalnie obserwowalna głównie w czasie cyklicznych obciążeń (patrz rys. 4.28). Gdy odciąża się próbkę betonową, widać zmianę sztywności. Sztywność próbki ponownie obciążonej jest mniejsza, a w kolejnych cyklach zmniejsza się jeszcze bardziej. Zmniejszenie sztywności następuje po osiągnięciu naprężeń krytycznych dla betonu B50, czyli naprężeń równych $50\ \text{MPa}$. Zmniejszająca się sztywność modelu jest związana z narastaniem zmiennej parametrycznego zniszczenia przy ściskaniu d_S według zależności 4.86.

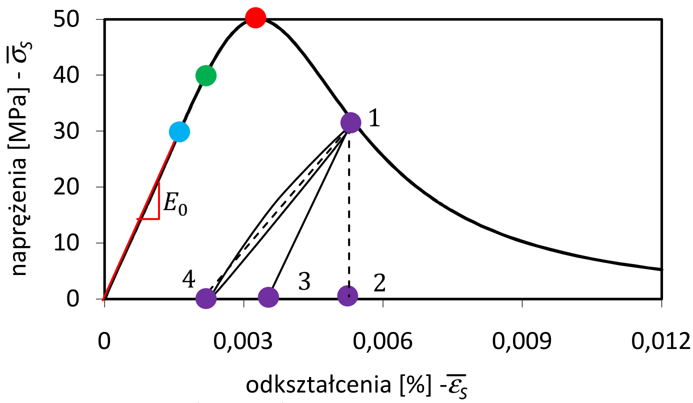


Rys. 4.30. Trójosiowe ściskanie betonu – krzywa eksperymentalna (Swanson, Green 1973)

Znajdowanie na podstawie krzywych eksperymentalnych odpowiednich punktów $\left(\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}, \overline{\sigma}_S\right)$ przedstawiono dla jednego przykładowego punktu oznaczonego na rys. 4.31 za pomocą ● (numery 1, 2, 3 oraz 4). Oznaczenia te są niezbędne do pełnej identyfikacji. Współrzędne punktu ●1 odczytujemy wprost z rys. 4.31 jako $(\overline{\varepsilon}_S = 0{,}0055, \overline{\sigma}_S = 30)$. Zatem punktowi ●2 odpowiada odcięta $0{,}0055$, która stanowi całkowite odkształcenie $\overline{\varepsilon}_S$. Na podstawie punktu ●1 obliczamy odkształcenia niesprężyste $\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}$, które stanowią odciętą punktu ●3. Odciętą tę obliczamy, zakładając odciążenie od punktu ●1, zgodne z początkową sztywnością E_0. W tym przypadku zachodzi zależności: $\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}} = \overline{\varepsilon}_S - \overline{\sigma}_S / E_0$, zatem odcięta $\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}$ punktu ●3 jest równa $0{,}0039$. Zidentyfikowany punkt karty materiałowej ma więc współrzędne $\left(\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}} = 0{,}0039, \overline{\sigma}_S = 30\right)$.

Punkty pokazujące ewolucję parametru zniszczenia w przestrzeni $\left(\overline{\varepsilon}_S^{\text{nl}}, d_S\right)$ i określające degradację sztywności ze względu na odkształcenia niesprężyste identyfikujemy następująco: odcięta $\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$ jest identyczna z odciętą obliczoną w poprzednim akapicie, a zmienna parametrycznej degradacji d_S jest równa $\left(f_c - \overline{\sigma}_S\right)/f_c$. Mając wartości $\overline{\sigma}_S$, d_S i $\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$, można obliczyć odkształcenie plastyczne $\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}}$, czyli odciętą punktu 4, za pomocą następującej zależności:

$$\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} = \overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}} - \frac{d_S}{1 - d_S}\frac{\overline{\sigma}_S}{E_0}. \tag{4.103}$$

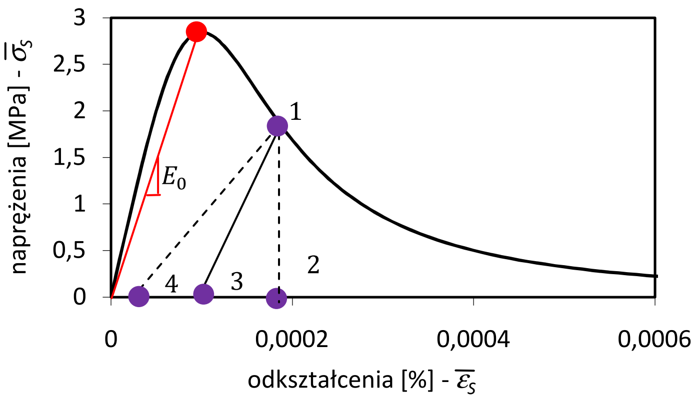


$\overline{\sigma}_S\left(\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} = 0\right) = 0{,}6 f_c = 30\ \mathrm{MPa}$

$\overline{\sigma}_S\left(\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} = 0{,}00015\right) = 0{,}8 f_c = 40\ \mathrm{MPa}$

$\overline{\sigma}_S\left(\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{pl}} = 0{,}0008\right) = f_c = 50\ \mathrm{MPa}$

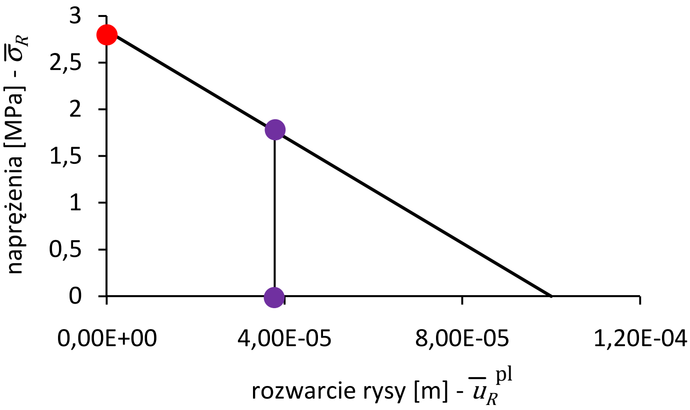
Rys. 4.31. Zależność naprężenie – odkształcenie przy jednoosiowym ściskaniu modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem



$\overline{\sigma}_R\left(\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}} = 0\right) = f_t = 2{,}8\ \mathrm{MPa}$

Rys. 4.32. Zależność naprężenie – odkształcenie przy jednoosiowym rozciąganiu modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem

Analogiczne rozważania należy przeprowadzić dla rozciągania. Zakłada się, że beton zachowuje się sprężyście do naprężeń f_t. W strefie osłabienia dochodzi do rozwoju trwałych niesprężystych odkształceń $\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{nl}}$ oraz zarysowania, któremu odpowiada lokalizacja odkształceń plastycznych $\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}$ połączona z degradacją sztywności betonu. Sztywność materiału odpowiadająca degradacji o d_R jest równa $(1 - d_R)E_0$. W strefie osłabienia po rozciąganiu dodatkowym parametrem materiałowym jest G_R, który, zgodnie z mechaniką pękania, określa energię niezbędną do otwarcia rysy o jednostkowym polu (Hilleborg, Modeer, Petersson 1976). Zgodnie z tą koncepcją, kruche uszkodzenie jest opisane nie zależnością $\overline{\sigma}_R - \overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{pl}}$, a zależnością $\overline{\sigma}_R - \overline{u}_R^{\mathrm{pl}}$. Rysa związana z lokalizacją odkształceń propaguje się, gdy naprężenie rozciągające osiągnie wartość krytyczną f_t. Gdy rysa się otworzy, naprężenia nie zmniejszają się do zera, ale są sprowadzane do zera wraz z rosnącym $\overline{u}_R^{\mathrm{pl}}$. Gdy szerokość rysy osiągnie wartość maksymalną (krytyczną) $\overline{u}_{R-\max}^{\mathrm{pl}}$, nośność betonu spada do zera.



Rys. 4.33. Liniowe osłabienie podczas rozciągania

Po zarysowaniu beton przenosi resztkowe naprężenia zgodnie z energią pękania, która równa jest co do wartości polu pod krzywą $\overline{\sigma}_R - \overline{u}_R^{\mathrm{pl}}$. Dyssypację energii przy utworzeniu rysy o jednostkowym polu wyraża wzór:

$$G_R = \int_0^{\overline{u}_{R-\max}^{\mathrm{pl}}} \overline{\sigma}_R d\overline{u}_R^{\mathrm{pl}}. \qquad 4.104$$

Oczywiście, funkcja opisująca naprężenia resztkowe po inicjacji rysy może być określona na różne sposoby (np. funkcja wykładnicza), jednak tutaj użyto zależności liniowej. Aby opisać w pełni parametry osłabienia betonu w wyniku rozciągania połączonego z degradacją sztywności (rys. 4.33) przy założeniu liniowości do f_t i liniowego osłabienia, wystarczy użyć następujących danych: $\overline{\sigma}_R = 2{,}8\ \mathrm{MPa}$ i $\overline{u}_R^{\mathrm{pl}} = 0$ oraz $\overline{\sigma}_R = 0\ \mathrm{MPa}$ i $\overline{u}_R^{\mathrm{pl}} =$

$\overline{u}_{R-\max}^{\mathrm{pl}}$. Założono, że maksymalna degradacja betonu jest równa 0,99. Znane są początkowe ekwiwalentne odkształcenia plastyczne podczas rozciągania w chwili t, to jest $\overline{\varepsilon}_{R-t}^{\mathrm{pl}}$ i d_{t-t}. Następnie oblicza się przyrost ekwiwalentnych odkształceń plastycznych podczas rozciągania $\dot{\overline{\varepsilon}}_{R}^{\mathrm{pl}}$ na podstawie niestowarzyszonego prawa płynięcia (hiperboliczna funkcja Druckera-Pragera jako powierzchnia potencjału plastycznego oraz powierzchnia obciążenia Lublinera). W kolejnym kroku oblicza się nowe ekwiwalentne odkształcenia plastyczne podczas rozciągania:

$$\overline{\varepsilon}_{R-t+\Delta t}^{\mathrm{pl}} = \overline{\varepsilon}_{R-t}^{\mathrm{pl}} + \dot{\overline{\varepsilon}}_{R}^{\mathrm{pl}}.$$

Jeśli odkształcenia $\overline{\varepsilon}_{R-t+\Delta t}^{\mathrm{pl}}$ są większe niż krytyczna wartość $\overline{\varepsilon}_{R-\mathrm{kryt}}^{\mathrm{pl}}$, wyznacza się przyrost plastycznego przemieszczenia na podstawie zależności:

$$\dot{\overline{u}}_{R}^{\mathrm{pl}} = \dot{\overline{\varepsilon}}_{R}^{\mathrm{pl}} l_0.$$

Następnie oblicza się zmienną degradacji betonu podczas rozciągania na podstawie zależności:

$$d_{t-t+\Delta t} = d_{t-t} + \dot{\overline{u}}_{R}^{\mathrm{pl}} / \overline{u}_{R-\max}^{\mathrm{pl}}.$$

Dodatkowo na rys. 4.34 przedstawiono ewolucję powierzchni obciążenia, zgodnie z ewolucją naprężeń efektywnych w funkcji efektywnych odkształceń plastycznych. Takie podejście zapewnia identyczną dyssypację energii na skutek utworzenia rysy, gdyż gęstość energii pękania jest niezależna od wielkości elementu.
Parametry materiałowe betonu klasy B50 podczas ściskania i rozciągania przedstawiono w tab. 4.4 i tab. 4.5.

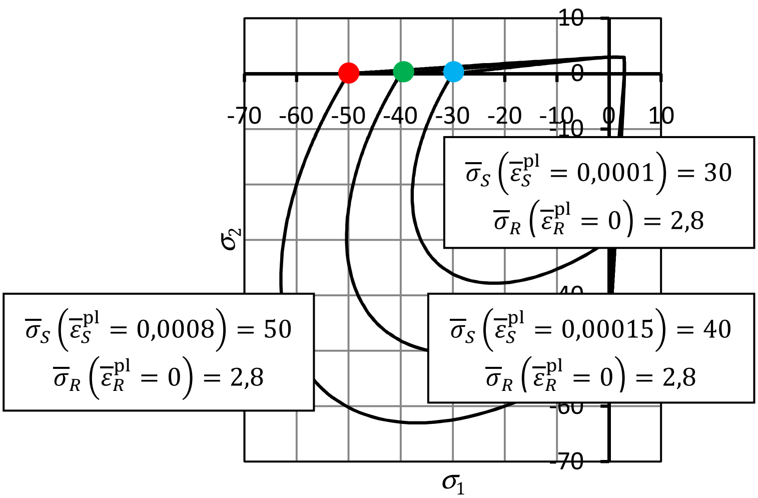
Tab. 4.4. Zależności $\overline{\sigma}_S - \overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$ i $d_S - \overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$

$\overline{\sigma}_S$ [MPa]	$\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$	d_S	$\overline{\varepsilon}_S^{\mathrm{nl}}$
30,0	0,000099	0,0	0,000099
40,0	0,000154	0,0	0,000154
50,0	0,000762	0,0	0,000762
40,0	0,002558	0,2	0,002558
20,0	0,005675	0,6	0,005675
5,0	0,011733	0,9	0,011733

Tab. 4.5. Zależności $\overline{\sigma}_R - \overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{nl}}$ i $d_R - \overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{nl}}$

$\overline{\sigma}_R$[MPa]	$\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{nl}}$	d_R	$\overline{\varepsilon}_R^{\mathrm{nl}}$
2,800	0,0	0,0	0,0
0,028	0,0004	0,99	0,0004

Dodatkowymi parametrami konstytutywnymi są α i γ. Określają one kształt powierzchni w płaskim stanie naprężenia i w płaszczyźnie południkowej, zgodnie z rys. 4.24 i 4.25 i przytoczonymi wcześniej zależnościami (patrz podrozdział 4.4). I tak, ze względu na krzywą Kupfera, zgodnie z którą stosunek $f_{bc}/f_c = 1{,}12$, α jest równe $0{,}0967742$.
Z porównania wyników eksperymentalnych w płaszczyźnie południkowej (Launay, Gachon 1971) z kształtem powierzchni obciążenia (rys. 4.26) wynika, że $\rho = 0{,}666$, w związku z tym parametr decydujący o kształcie powierzchni Lublinera w trójosiowym ściskaniu $\gamma = 3$.
Ostatnim etapem jest identyfikacja dwóch parametrów konstytutywnych ψ, ϵ określających kształt powierzchni potencjału plastycznego (rys. 4.27). Metoda identyfikacji może być nazwana globalnym dopasowaniem. Podstawą identyfikacji były znane wyniki eksperymentalne (rys. 4.30) i cytowane wyniki badań ściskania w trójosiowym stanie naprężenia (Swanson, Green 1973).



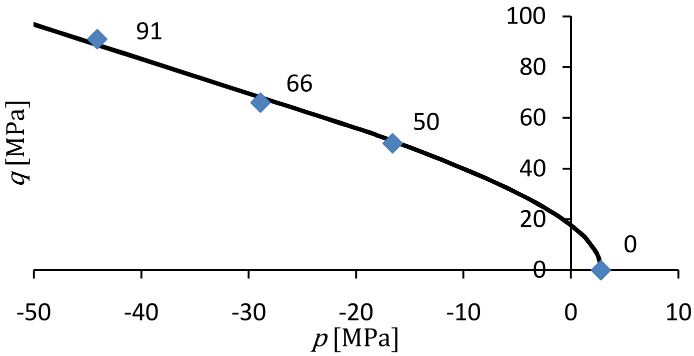
Rys. 4.34. Ewolucja powierzchni obciążenia w płaskim stanie naprężenia

Tab. 4.6. Punkty identyfikacyjne powierzchni potencjału plastycznego

Nr	p_i[MPa]	q_i[MPa]	σ_1[MPa]	σ_2[MPa]	σ_3[MPa]
1	2,8	0	2,8	2,8	2,8
2	−16,6	50	0,0	0,0	−50
3	−28,9	66	−6,9	−6,9	−72,9
4	−44,1	91	−13,8	−13,8	−104,8

Na podstawie naprężeń głównych obliczono wartości efektywnych naprężeń p oraz q i w tej płaszczyźnie przeprowadzono identyfikację obu parametrów metodą najmniejszych kwadratów, minimalizując błąd opisany równaniem:

$$f = \sum_{i=1}^{4} \left(q_i - q(p_i, \psi, \epsilon, f_c, f_t) \right)^2 \to \min.$$

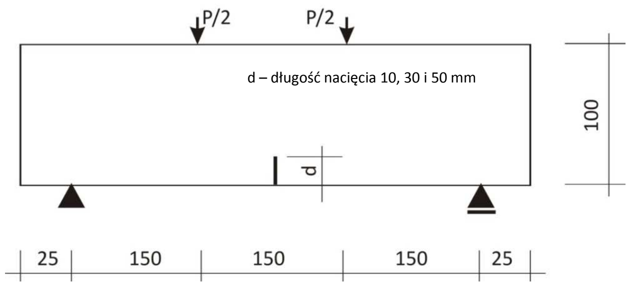


Rys. 4.35. Powierzchnia potencjału plastycznego wraz z punktami identyfikacyjnymi

Minimalizacja prowadzi do określenia parametrów ψ, ϵ, które przyjmują wartości kolejno 49^o oraz 1,0. Kształt powierzchni potencjału plastycznego wraz z czterema punktami identyfikacyjnymi przedstawiono na rys. 4.35.

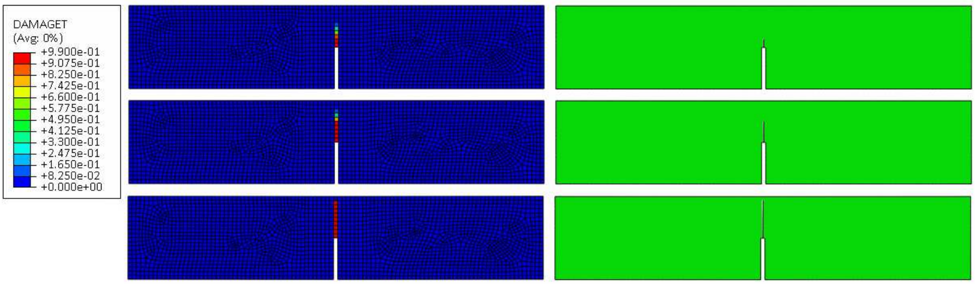
4.4. Czteropunktowe zginanie belki betonowej z nacięciem

Niżej porównano wyniki obliczeń numerycznych i eksperymentalnych dla czteropunktowego zginania belki z nacięciem. Wytrzymałość betonu w takim eksperymencie badał między innymi Hordijk (1992). Badana belka betonowa miała długość 500 mm, jej przekrojem poprzecznym był prostokąt o podstawie 50 mm i wysokości 100 mm. Była ona nacięta w środku rozpiętości pomiędzy podporami (ich odległość to 450 mm). Rozważano trzy długości nacięcia d: 10, 30 oraz 50 mm. Belkę obciążono dwiema siłami skupionymi, równo odległymi (o 75 mm) od osi symetrii belki. Wymiary belki i jej schemat statyczny przedstawiono na rys. 4.36.



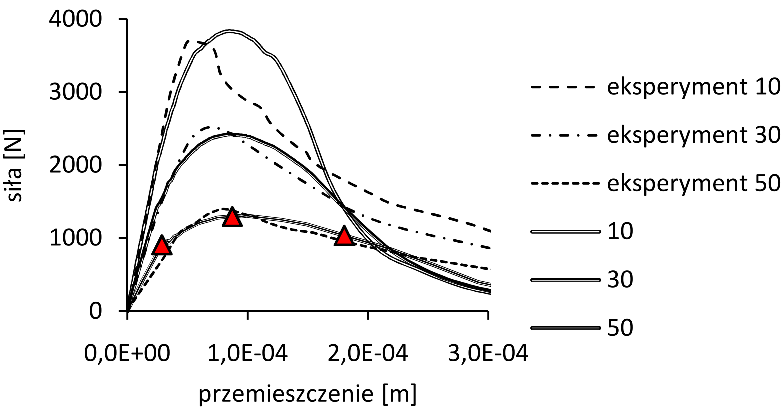
Rys. 4.36. Geometria i wymiary zginanej czteropunktowo belki betonowej z pojedynczym nacięciem (Hordijk 1992)

Obliczenia numeryczne identycznej belki z użyciem połączonego opisu – ciągłego i nieciągłego – zniszczenia wykonywali między innymi Simone, Wells i Sluys (2003). Opisane niżej obliczenia numeryczne przeprowadzono w programie Abaqus/Standard. Ze względu na charakter eksperymentu laboratoryjnego zdecydowano się na sterowanie przemieszczeniami obu punktów przyłożenia siły. Eksperyment laboratoryjny był prowadzony w identyczny sposób (sterowanie przemieszczeniem) ze względu na pojawienie się pęknięcia na przedłużeniu wszystkich trzech nacięć: 10, 30 i 50 mm, któremu towarzyszył spadek nośności. Dokonano dyskretyzacji belki w modelu numerycznym na około 4000 elementów skończonych, płaskiego stanu naprężenia o zredukowanym całkowaniu (CPS4R).



Rys. 4.37. Rozkład parametru zniszczenia DAMAGET podczas rozciągania oraz propagacja rysy przy największym nacięciu

Na rysunku 4.37c przedstawiono rozkład parametru zniszczenia i propagację rysy na tych samych etapach procesu, czyli przed osiągnięciem maksymalnej wartości siły oraz w chwili uzyskania nośności maksymalnej. Następnie dochodzi do etapu, który numerycznie i eksperymentalnie może być sterowany tylko za pomocą przemieszczenia, gdyż wartość siły, a właściwie wartość reakcji na wymuszenie kinematyczne, się zmniejsza.

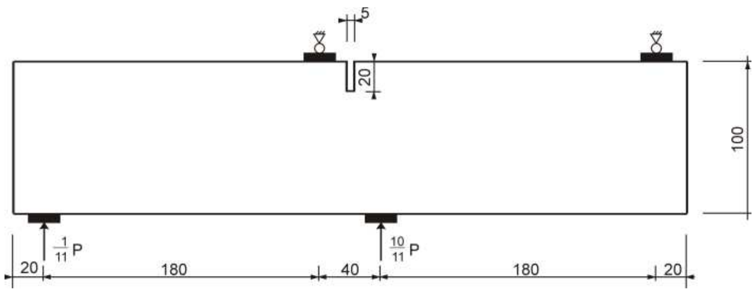


Rys. 4.38. Porównanie wyników numerycznych i eksperymentalnych próby czteropunktowego zginania belki z nacięciem (10, 30 i 50 mm)

Opisywane wyżej trzy etapy procesu oznaczono czerwonymi trójkątami na rys. 4.28. Wykresy na rys. 4.28 są istotnym elementem analizy porównawczej wyników obliczeń numerycznych z eksperymentem laboratoryjnym, gdyż pozwalają nie tylko na jakościową, ale także na ilościową ocenę rezultatów uzyskanych w próbie czteropunktowego zginania belki betonowej z nacięciem. Na rysunku 4.38 znajdują się trzy przerywane linie odpowiadające wynikom eksperymentalnym uzyskanym przy różnych długościach nacięć (Hordijk 1992 oraz Simone, Wells, Sluys 2003). W obliczeniach numerycznych w strefie nacięcia przyjęto strukturalne elementy skończone, natomiast w pozostałej części nieregularne. Charakterystyczny wymiar elementu skończonego wynosił w omawianym przypadku 5 mm. Analizę wpływu wielkości charakterystycznej elementu skończonego na nośność przedstawiono w kolejnym podrozdziale 4.5. Wyniki numeryczne, podobnie jak symulacje Simone i współautorów, były zbieżne. Obliczenia numeryczne dla trzech nacięć wykazują zadowalającą zgodność z eksperymentami (Hordijk 1992), zwłaszcza jeżeli chodzi o wartość siły maksymalnej (nośności). Dodatkowo należy wspomnieć, iż model oparty na metodzie elementów skończonych dla założonych parametrów konstytutywnych charakteryzuje się większą kruchością. Jest to spowodowane liniowym osłabieniem zdefiniowanym przez tzw. przemieszczenie niszczące, odpowiadające 99-procentowemu zmniejszeniu się sztywności materiału.

4.5. Czteropunktowe asymetryczne zginanie belki betonowej z nacięciem

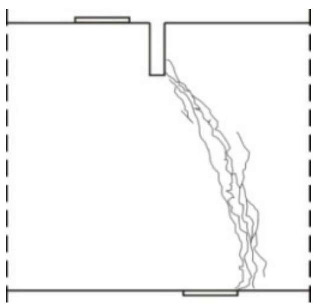
Czteropunktowe asymetryczne zginanie belki betonowej z nacięciem jest ważnym eksperymentem, który służy do numerycznego testowania związków konstytutywnych dla betonu poddanego dominującemu ścinaniu. Zniszczenie w takiej próbie ma postać niesymetrycznego pojedynczego pęknięcia przedstawionego na rys. 4.40. Geometrię rozważanej belki betonowej wraz z warunkami brzegowymi przedstawiono na rys. 4.39. Wszystkie wymiary belki są podane w milimetrach, jej grubość wynosi 100 mm. Istotnym elementem



Rys. 4.39. Geometria i warunki brzegowe czteropunktowego asymetrycznego zginania belki betonowej

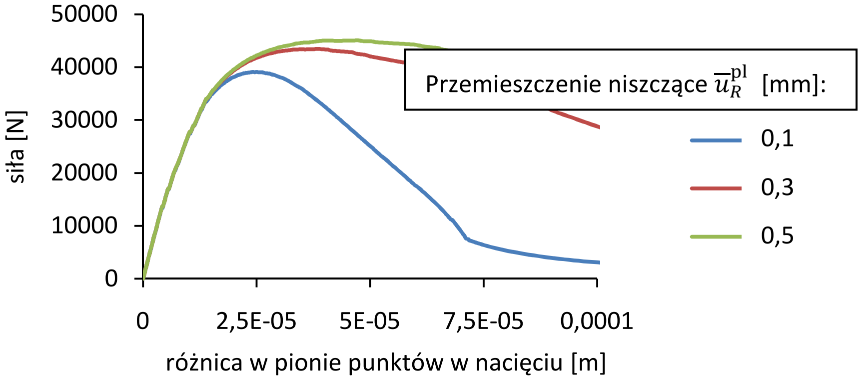
testu numerycznego jest odpowiednie przyłożenie jednoparametrowego obciążenia. Pokazano to na rys. 4.39. W symulacji numerycznej obciążenie miało postać wymuszenia

kinematycznego, tak jak w eksperymencie laboratoryjnym (Schlangen 1993), w celu zarejestrowania procesu zniszczenia próbki betonowej. Gdy obciążenie jest przykładane jako monotonicznie narastająca siła, w chwili osiągnięcia wartości siły krytycznej proces quasi-statyczny zamienia się w dynamiczny i dochodzi do nagłego zniszczenia betonowej konstrukcji, do nagłej utraty równowagi statycznej i braku zbieżności procedury Newtona-Raphsona. Zadowalające rezultaty osiągnięto również przez zastosowanie procedury jawnego całkowania równań ruchu. Parametry programu Abaqus/Explicit dobrano tak, aby osiągnąć quasi-statyczność procesu, tzn. wydłużono czas procesu do około 60 s i jednocześnie zastosowano skalowanie masy (sztuczne zwiększenie gęstości). Dzięki temu energia kinetyczna stanowiła niewielki ułamek (około 1/100) całkowitej energii wewnętrznej układu.
W modelu numerycznym obciążenie w postaci wymuszenia kinematycznego przykładano poprzez ciało sztywne, przy czym odległość pomiędzy siłą a centralnym punktem przykładania siły do próbki betonowej była 10 razy krótsza niż odległość do lewego punktu przykładania siły do belki betonowej. Dzięki temu obciążenie w modelu numerycznym było przykładane identycznie jak w eksperymencie laboratoryjnym.

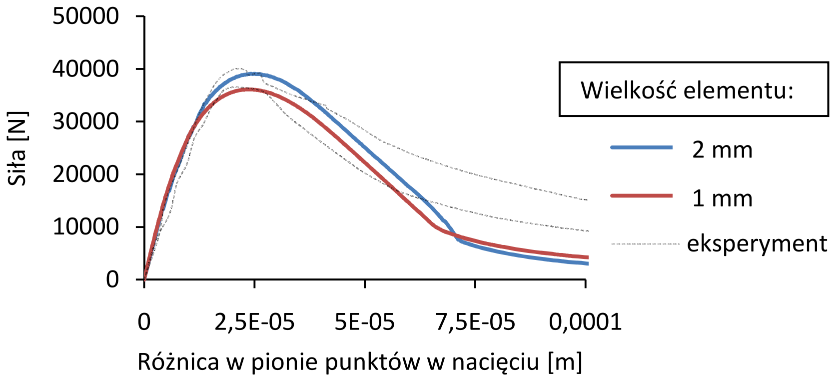


Rys. 4.40. Mechanizm zniszczenia omawianej belki betonowej (Schlangen 1993)

Obliczenia numeryczne prowadzono dla różnej gęstości siatki elementów skończonych (CPS4R) oraz parametrów konstytutywnych zidentyfikowanych w podrozdziale 4.4. Przeprowadzono dodatkowo analizę dla innych wartości parametru decydującego o osłabieniu betonu podczas rozciągania (przemieszczenia niszczącego). Rozważano również zastosowanie innych typów elementów skończonych, jak np. trójkątnego elementu skończonego (Jankowiak, Łodygowski 2005; Jankowiak 2004). Tutaj te ostatnie wyniki numeryczne nie są prezentowane. Należy jednak nadmienić, że typ elementu nie ma decydującego wpływu na wartość siły niszczącej i mechanizm zniszczenia, gdy siatki elementów skończonych mają zbliżoną gęstość. Przedstawiono nowe wyniki, które uzyskano z użyciem programu Abaqus/Standard. Należy zaznaczyć, że starsze wyniki (Jankowiak, Łodygowski 2005) uzyskano za pomocą programu Abaqus/Explicit. We wszystkich eksperymentach numerycznych belka betonowa ulega zniszczeniu w sposób pokazany na rys. 4.40. Rozważano różne dyskretyzacje z charakterystyczną długością elementów skończonych 1, 2 i 5 mm. Dla wybranych dyskretyzacji sprawdzono, oprócz wytrzymałości betonu na rozciąganie 3,0 MPa, wpływ podstawowego parametru konstytutywnego decydującego o zniszczeniu podczas rozciągania, a mianowicie przemieszczenia niszczącego $\overline{u}_R^{\mathrm{pl}}$. Dla jasności wywodu przytoczono tylko wybrane krzywe i rozkłady zmiennych pola. Na rysunku 4.41 przedstawiono zależności siła – wzajemne przemieszczenie w pionie punktów nacięcia dla różnych wartości przemieszczenia niszczącego, gdy wymiar elementu wynosił 2 mm. Widać wyraźnie, że opisywane przemieszczenie niszczące ma największy wpływ na osłabienie w strefie pokrytycznej, czyli po osiągnięciu nośności. Im wartość przemieszczenia niszczącego jest mniejsza, tym mniejsza wartość energii pękania jest potrzebna do rozwarcia rysy o jednostkowym polu. To z kolei powoduje bardziej kruche globalne zachowanie i kruchą odpowiedź układu. Względna różnica maksymalnej osiągniętej siły to 15%.

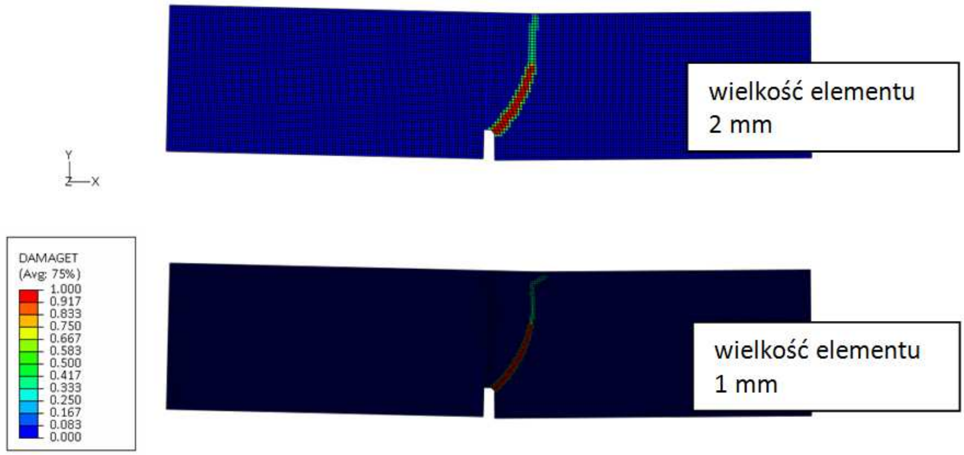


Rys. 4.41. Zależność siła – wzajemne przemieszczenie w pionie punktów nacięcia dla różnych wartości przemieszczenia niszczącego, gdy element miał 2 mm



Rys. 4.42. Porównanie z eksperymentem (Schlangen 1993) zależności siła – wzajemne przemieszczenie w pionie punktów nacięcia dla wartości przemieszczenia niszczącego 0,1 mm i dla dwóch wymiarów elementu skończonego

Następnie prowadzono obliczenia dla innych charakterystycznych wymiarów elementów skończonych. Na rysunku 4.42 przedstawiono dwie ciągłe różnokolorowe krzywe, które odpowiadają zależności siła – wzajemne przemieszczenie w pionie punktów nacięcia dla charakterystycznych wymiarów elementów skończonych 1 i 2 mm. Widać na nim wyraźną względną różnicę (około 8%) wartości maksymalnej siły nośnej dla obu dyskretyzacji. Ważnym wnioskiem jest to, że prezentowane rozwiązanie jest akceptowalne, ponieważ nie zależy w sposób patologiczny od wymiaru elementu. Dodatkowo na rys. 4.42 zaprezentowano wyniki badań eksperymentalnych (pomiędzy liniami przerywanymi) (Schlangen 1993) oraz rozkłady parametru zniszczenia dla obu dyskretyzacji (charakterystyczna długość elementów 1 i 2 mm) na końcu procesu. Przemieszczenia dla obu map zostały pięciokrotnie przeskalowane. Również mechanizmy zniszczenia dla obu dyskretyzacji są zgodne (patrz rys. 4.43), a co najważniejsze, odpowiadają dość dokładnie prezentowanym na rys. 4.40.



Rys. 4.43. Porównanie mechanizmu zniszczenia (parametru zniszczenia podczas rozciągania DAMAGET) dla dwóch rozważanych dyskretyzacji

Dodajmy, że w omawianym przypadku obliczeniowym wprowadzenie wewnętrznej skali długości (regularyzacja) nastąpiło przez zdefiniowanie stałej gęstości energii pękania, niezależnej od wielkości elementu. Zapobiegło to wystąpieniu patologicznej zależności rozwiązania MES od gęstości dyskretyzacji i dowodzi dobrego postawienia problemu brzegowego.

4.6. Zginanie ze ściskaniem zespolonego słupa stalowo-betonowego

Ostatnim problemem obliczeniowym omawianym w tym rozdziale jest modelowanie numeryczne obetonowanych elementów stalowych ściskanych mimośrodowo oparte na wynikach badać eksperymentalnych prowadzonych w Instytucie Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej (Łodygowski, Szumigała 1992). Podstawowym celem tej prezentacji jest weryfikacja modelu numerycznego przez porównanie z eksperymentem laboratoryjnym w dużej skali.

Eksperyment laboratoryjny

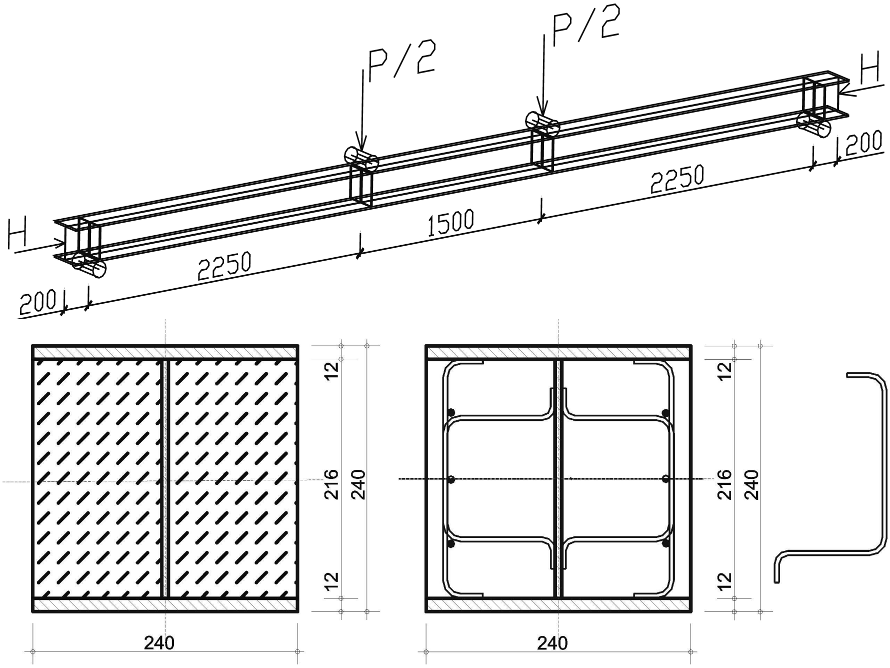
Przedmiotem badań eksperymentalnych było sześć obetonowanych słupów stalowych o długości 6 m. Stalowy rdzeń słupa stanowi spawany dwuteownik szerokostopowy o wy-

miarach $h = b = 240 \text{ mm}$, grubości pasa $t_f = 12 \text{ mm}$ i środnika $t_w = 6 \text{ mm}$. W miejscu oparcia i przekazania obciążenia zastosowano dodatkowe żeberka usztywniające (patrz rys. 4.44). Współpracę betonu i stali zapewniły strzemiona z prętów stalowych przyspawane do środnika i pasów. Wzdłuż słupa umieszczono zbrojenie przeciwskurczowe z prętów o średnicy 3 mm. Słup początkowo został obciążony stałą siłą ściskającą, a następnie poddano go zginaniu czteropunktowemu, jak na schemacie na rys. 4.44. Przyrost obciążenia poprzecznego początkowo wynosił 20 kN, a w dalszej fazie z przyrostem przemieszczenia wynosił 10 mm. Siła ściskająca miała stałą wartość 500 kN.
Wykonano również odpowiednie badania cech mechanicznych betonu i stali. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 4.28, 4.29 i 4.45. Odpowiednie krzywe naprężenie – odkształcenie zastosowano w modelu numerycznym do opisu betonu plastycznego ze zniszczeniem.

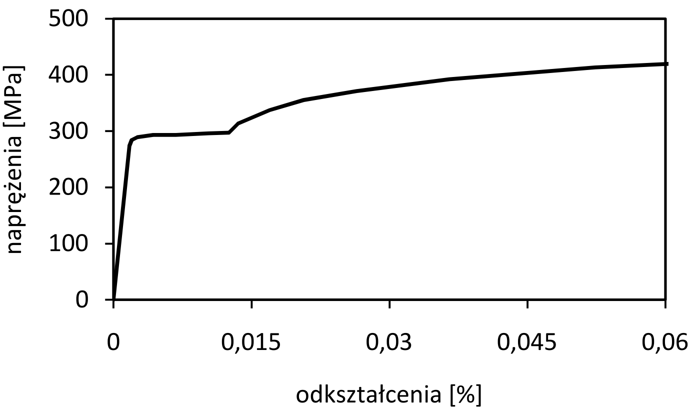
Symulacja komputerowa zniszczenia stalowego słupa obetonowanego

Stworzono przestrzenny model słupa. Do obliczeń użyto nieliniowego, dynamicznego programu metody elementów skończonych Abaqus/Explicit, czyli zastosowano procedurę jawnego całkowania równań ruchu.
Przestrzenny model numeryczny składał się z 3996 elementów powłokowych (S4R) oraz z 9966 ośmiowęzłowych elementów przestrzennych (C3D8R). Przestrzenne elementy powłokowe wykorzystano do dyskretyzacji stalowego spawanego dwuteownika i żeberek (usytuowanych w miejscu przyłożenia sił skupionymi i w miejscu podparć). Elementy przestrzenne służyły do modelowania betonowej części modelu. Analizowano ćwiartkę słupa oraz założono całkowitą przyczepność stali i betonu. W badaniach eksperymentalnych taki stan rzeczy uzyskano przez wprowadzenie odpowiednio skonstruowanych strzemion. W przestrzennym modelu numerycznym całkowitą współpracę betonu i stali osiągnięto przez przyrównanie przemieszczeń powierzchni kontaktowych między stalą i betonem, tzn. przez narzucenie dodatkowych wewnętrznych więzów kinematycznych w modelu.
Obliczenia prowadzono dla dwóch wariantów. W pierwszym wariancie zespolony słup stalowo-betonowy był obciążony wyłącznie siłami zewnętrznymi. Przez siły zewnętrzne rozumie się siłę ściskającą o stałej wartości 500 kN oraz dwie siły zginające (tzw. czteropunktowe zginanie, rys. 4.44). Wartość siły zginającej w funkcji przemieszczenia poprzecznego w środku rozpiętości służyła do porównania wyników obliczeń numerycznych i eksperymentu laboratoryjnego. W drugim wariancie dla zapewnienia większej zbieżności wyników numerycznych i eksperymentalnych uwzględniono naprężenia resztkowe spowodowane spawaniem stali (spoiny między środnikiem i pasami) oraz odkształcenia resztkowe powstałe na skutek skurczu betonu.
Tworząc przestrzenny model stalowo-betonowego słupa zespolonego, oprócz nieliniowości geometrycznej uwzględniono również nieliniowość fizyczną. W eksperymencie nieliniowość fizyczna była spowodowana plastycznością stali konstrukcyjnej oraz nieliniowym zachowaniem betonu w przestrzeni $\sigma - \varepsilon$. Stal modelowano w eksperymencie numerycznym za pomocą materiału sprężysto-plastycznego (rys. 4.45), a beton za pomocą sprężysto-plastycznego z izotropowym zniszczeniem (BPZ – beton plastyczny ze zniszczeniem).

Dzięki takim modelom konstytutywnym opisującym zachowanie stali i betonu możliwe było określenie miejsc uplastycznienia czy zniszczenia obu materiałów.



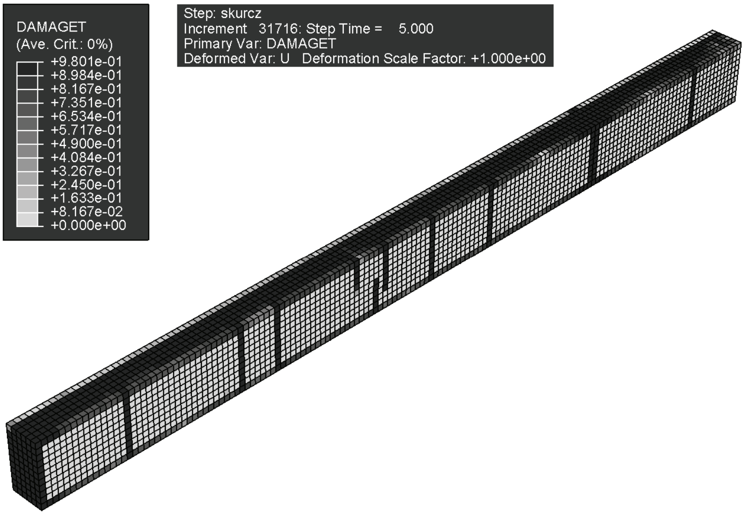
Rys. 4.44. Schemat modelu badawczego



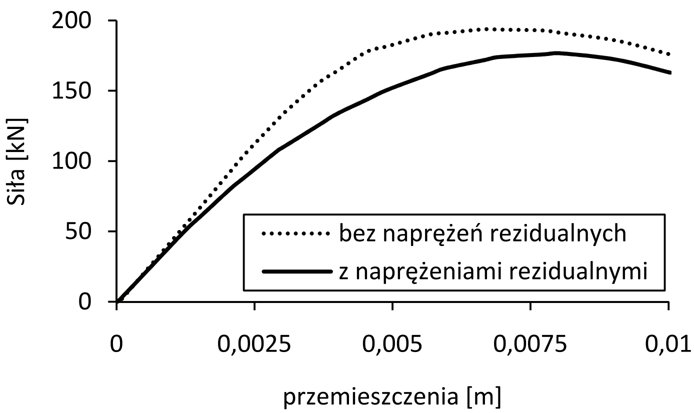
Rys. 4.45. Test rozciągania stali

Użycie modelu konstytutywnego betonu z osłabieniem oraz uwzględnienie kontaktu betonu ze stalą sprawiło, że w praktyce okazała się nieefektywna typowa procedura przyrostowo-

-iteracyjna stosowana w Abaqus/Standard. Nie było bowiem zbieżności w procedurach iteracyjnych podczas niszczenia betonu. Żadne zabiegi numeryczne typu zwiększenie liczby iteracji czy zmniejszenie dokładności obliczeń nie przyniosły pożądanych rezultatów i dlatego

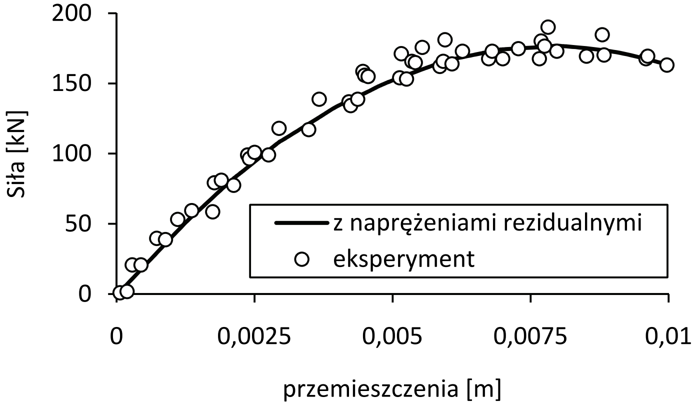


Rys. 4.46. Zniszczenie słupa zespolonego na skutek skurczu betonu; rozkład skalarnego parametru zniszczenia DAMAGET



Rys. 4.47. Wykres siła poprzeczna – przemieszczenie w środku rozpiętości słupa dla modelu przestrzennego

zastosowano procedurę jawnego całkowania równań ruchu z odpowiednio zmodyfikowanym quasi-statycznym obciążeniem i skalowaniem masy (Hibbitt, Karlsson, Sorensen 2005). Na rysunku 4.47 przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane dla dwóch wariantów. W pierwszym wariancie pominięto wszystkie stany początkowe, a w drugim uwzględniono naprężenia i odkształcenia resztkowe. Na rysunkach 4.47 i 4.48 przedstawiono zależności wartości siły poprzecznej od przemieszczenia środkowego przekroju słupa prostopadle do osi podłużnej.



Rys. 4.48. Wykres siła poprzeczna – przemieszczenie w środku rozpiętości słupa dla modelu przestrzennego oraz doświadczenia laboratoryjnego

Na rysunku 4.47 porównano wyniki numeryczne dla obu wariantów. Widoczne jest niewielkie zmniejszenie sztywności i nośności, gdy uwzględni się w modelu resztkowe (rezydualne) naprężenia i odkształcenia. Na rysunku 4.48 symbolami punktowymi oznaczono rezultaty pomiarów przemieszczeń w trakcie badań laboratoryjnych w dużej skali (skala 1:1), a linią ciągłą wyniki obliczeń numerycznych dla modelu przestrzennego, które otrzymano, posługując się programem Abaqus/Explicit. Wyniki numeryczne są zgodne z eksperymentalnymi. Świadczy to o poprawności założeń modelu numerycznego. Procedura obliczeniowa Abaqus/Explicit, mimo że jest przeznaczona do zadań dynamicznych, jest przydatna w rozwiązywaniu zagadnień quasi-statycznych z zastosowaniem modelu konstytutywnego betonu plastycznego ze zniszczeniem. Z łatwością można również przejść do analizy takich konstrukcji przy obciążeniach dynamicznych i impulsowych. Podobnymi problemami wytrzymałości obetonowanych belek stalowych zajmował się Madaj (2005).

5. Dynamiczne kryteria zniszczenia

W rozdziale 4 szczegółowo omówiono kryteria zniszczenia betonu przy obciążeniach quasi--statycznych. W przypadku obciążeń dynamicznych – ze względu na wpływ prędkości odkształceń, których wzrost powoduje zwiększenie wytrzymałości dynamicznej betonu (patrz podrozdział 1.2) – ogólna postać kryterium zniszczenia to

$$f(\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad 5.1$$

Gdy rozpatrywanym materiałem są metale, często funkcję f rozkłada się na sumę lub iloczyn funkcji (Litoński 1977 oraz Rusinek 2000). Zatem równanie 5.1 może przyjąć następującą postać:

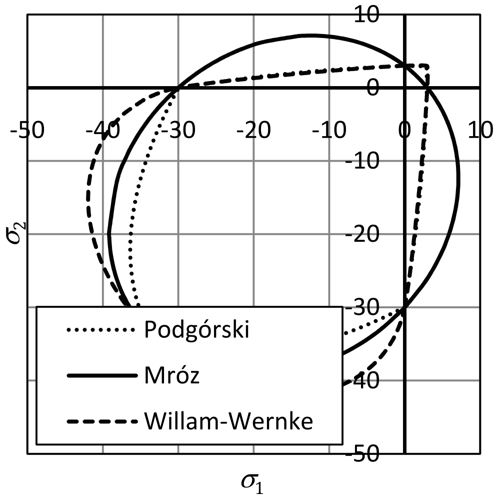
$$g(\sigma_{ij}) \cdot h(\dot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad 5.2$$

W odniesieniu do funkcji g możliwe jest zastosowanie dowolnego kryterium quasi--statycznego, a w przypadku funkcji wzmocnienia h należy uwzględnić przyrost wytrzymałości *TDIF* i *CDIF*. Porównanie trzech przykładowych funkcji g przedstawiono na rys. 5.1 w płaskim stanie naprężenia. Są to kolejno funkcje zaproponowane przez Podgórskiego, Mroza i Willama-Wernkego. Pierwsza z nich jest pięcioparametrowa, dwie pozostałe trzyparametrowe. Często stosuje się wzmocnienie izotropowe, co oznacza, iż *DIF* zwiększa jedynie jeden z parametrów zastosowanego kryterium, a mianowicie ten, który decyduje o jego rozmiarach.

Inne kryterium zniszczenia materiałów, oparte na koncepcji kumulacji zniszczenia, zaprezentowali Tuler i Butcher (1968) oraz Campbell (1953). Znaleźli oni dobrą korelację pomiędzy dynamiczną wytrzymałością a czasem trwania impulsu naprężenia. Naprężenie niszczące w tym kryterium określono w następujący sposób:

$$\int^{t_c} \left(\sigma^{eq} - \sigma_0^{eq}\right)^{\lambda} dt = C, \quad 5.3$$

gdzie λ, σ_0^{eq} i C są stałymi materiałowymi, a t_c czasem zniszczenia wyznaczanym przez kryterium. Wielkość σ^{eq} jest naprężeniem ekwiwalentnym, zgodnym z wybranym kryterium zniszczenia. Do metali często stosuje się naprężenia sprowadzone według kryterium Hubera-Misesa-Henky'ego, a do betonu sprowadzone według kryterium Druckera-Pragera, Lublinera czy Mroza (patrz poprzedni rozdział).



Rys. 5.1. Porównanie możliwych do zastosowania funkcji g

Inne kumulatywne kryterium zniszczenia przedstawił Freund (1993). Ma ono postać:

$$\int^{t_c} \left[\frac{\sigma^{eq}}{\sigma_0^{eq}} - 1\right]^{\beta} dt = D, \qquad 5.4$$

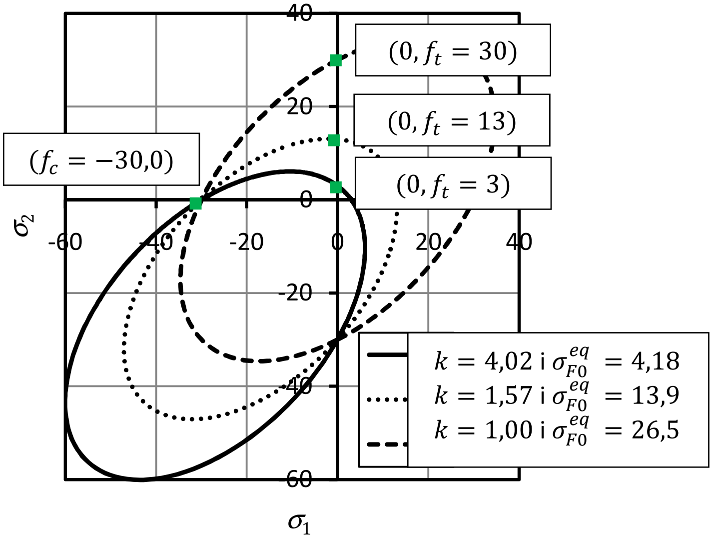
gdzie σ_0^{eq}, β i D są stałymi materiałowymi.
W kolejnych podrozdziałach szczegółowo zaprezentowano inne kumulatywne kryterium zniszczenia i jego zastosowanie do określenia wytrzymałości dynamicznej betonu.

5.1. Kumulatywne kryterium zniszczenia

Wytrzymałość betonu zarówno na ściskanie, jak i na rozciąganie zależy od prędkości odkształceń. Jedną z możliwości uwzględnienia wpływu prędkości odkształceń na wytrzymałość betonu jest kumulatywne kryterium zniszczenia (*KKZ*). Początkowo kryterium to było wykorzystywane do opisu zniszczenia metali (Campbell 1953). Następnie zostało zastosowane do modelowania zniszczenia betonu (Brara, Camborde, Klepaczko, Mariotti 2001 oraz Stolarski 2004) za pomocą metody elementów dyskretnych (Cundall, Strack 1979).
Kryterium to uogólniono, aby prawidłowo opisywało zniszczenie betonu w trójosiowym stanie naprężenia (Jankowiak, Łodygowski 2007) i zaimplementowano jako procedurę

VUMAT w programie Abaqus/Explicit. Czas zniszczenia materiału poddanego impulsowi naprężenia jest określony przez kumulatywne kryterium zniszczenia. W formie całkowej ma ono postać:

$$t_{c0} = \int_0^{t_c} \left(\frac{\sigma_F^{eq}(t)}{\sigma_{F0}^{eq}}\right)^{\alpha(T)} dt\,, \qquad \text{jeśli} \qquad \sigma_F^{eq}(t) > \sigma_{F0}^{eq}\,. \tag{5.5}$$



Rys. 5.2. Powierzchnia zniszczenia w przestrzeni naprężeń głównych dla różnych parametrów k i σ_{F0}^{eq} oraz $\sigma_3 = 0$

W równaniu 5.5 występują: t_{c0}, czyli najdłuższy krytyczny czas $\alpha(T)$, będący parametrem, a dokładniej wartością zależną od temperatury T, związaną z energią aktywowaną podczas procesu separacji (zerwania więzów kohezji), oraz σ_{F0}^{eq}, czyli quasi-statyczna ekwiwalentna wytrzymałość betonu na rozciąganie. Następującej miary naprężeń użyto do opisu deformacji w trójosiowym stanie naprężenia (Geers, Borst, Peerlings 2000):

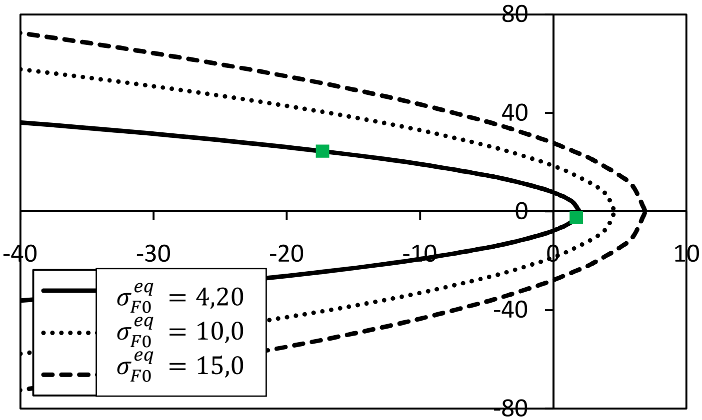
$$\sigma_F^{eq} = \frac{k-1}{2k(1-2v)} I_1 + \frac{1}{2k}\sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2v} I_1\right)^2 + \frac{6k}{(1-v)^2} J_2}\,, \tag{5.6}$$

gdzie I_1 i J_2 są kolejno pierwszym i drugim niezmiennikiem tensora i dewiatora tensora naprężenia, σ_{F0}^{eq} jest uogólnieniem ekwiwalentnych naprężeń Hubera-Misesa-Hencky'ego (Geers, Borst, Peerlings 2000) i było używane do określenia wytrzymałości betonu przy obciążeniach quasi-statycznych, k wpływa na kształt powierzchni zniszczenia w przestrzeni naprężeń głównych i decyduje o przesunięciu powierzchni w kierunku strefy ściskanej.

Wpływ parametru k na kształt dwuparametrowej (σ_{F0}^{eq}, k) powierzchni zniszczenia, opisanej równaniem:

$$f(I_1, J_2) = \frac{k-1}{2k(1-2v)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2v} I_1\right)^2 + \frac{6k}{(1-v)^2} J_2} - \sigma_F^{eq}, \qquad 5.7$$

przedstawiono na rys. 5.2. Gdy parametr $k = 1$, powierzchnia jest symetryczna w przestrzeni naprężeń głównych (linia przerywana). Gdy parametr $k = 4{,}02$, powierzchnia jest niesymetryczna w przestrzeni naprężeń głównych (linia ciągła). Na podstawie dwóch założonych punktów dokonano identyfikacji parametrów powierzchni zniszczenia. Pierwszy z nich odpowiada wytrzymałości betonu na rozciąganie równej $3\ \mathrm{MPa}$, a drugi wytrzymałości na ściskanie $-30\ \mathrm{MPa}$. Takie założenia doprowadziły do wyznaczenia dwóch parametrów konstytutywnych: $\sigma_{F0}^{eq} = 4{,}18\ \mathrm{MPa}$ oraz $k = 4{,}02$.



Rys. 5.3. Kształt powierzchni zniszczenia w przekroju południkowym w przestrzeni $r - \xi$ dla $k = 4{,}02$

Na rysunku 5.3 przedstawiono przekrój południkowy uogólnionego kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego (Geers, Borst, Peerlings 2000) używanego w *KKZ*. Krzywe powierzchni ekwiwalentnych naprężeń pokazano na rys. 5.3 dla różnych wielkości ekwiwalentnych naprężeń rozciągających. Istotne jest zdefiniowanie osi, tzn. podanie, co jest rzędną, a co odciętą punktów. Współrzędne punktów są obliczane na podstawie zależności: $r = \pm\sqrt{2J_2}$ oraz $\xi = 1/\sqrt{3}\, I_1$, przy czym ξ jest odległością wzdłuż osi hydrostatycznej, a r odległością w płaszczyźnie prostopadłej do osi hydrostatycznej. Po uwzględnieniu zależności $r - J_2$ i $\xi - I_1$ (patrz równanie 4.17) równanie 5.6 przyjmuje następującą postać:

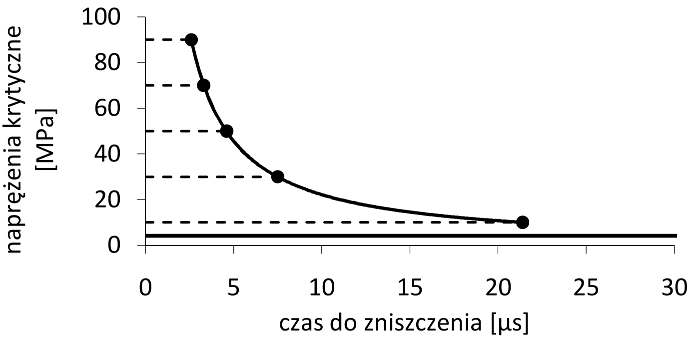
$$\sigma_F^{eq} = \frac{(k-1)\sqrt{3}}{2k(1-2v)}\xi + \frac{1}{2k}\sqrt{\left(\frac{(k-1)\sqrt{3}}{1-2v}\xi\right)^2 + \frac{6k}{(1-v)^2}\frac{r^2}{2}}. \qquad 5.8$$

Po przekształceniach otrzymujemy zależność:

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}k\sigma_F^{eq}\frac{2(1-v)^2}{6k} - \frac{4}{3}\sqrt{3}\sigma_F^{eq}\frac{(k-1)(1-v)^2}{(1-2v)}\xi} \qquad 5.9$$

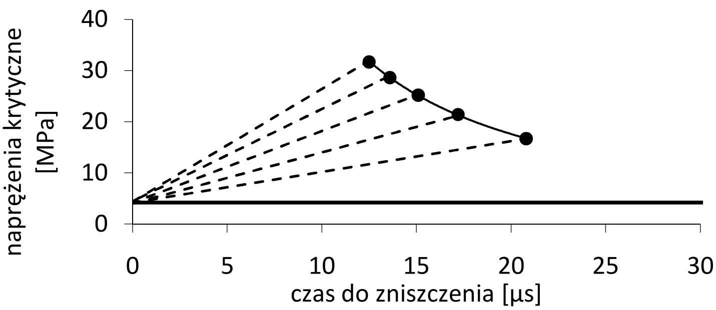
dla

$$\xi \leq \xi_{\max} = \frac{k\sigma_F^{eq}(1-2v)}{(k-1)\sqrt{3}}. \qquad 5.10$$

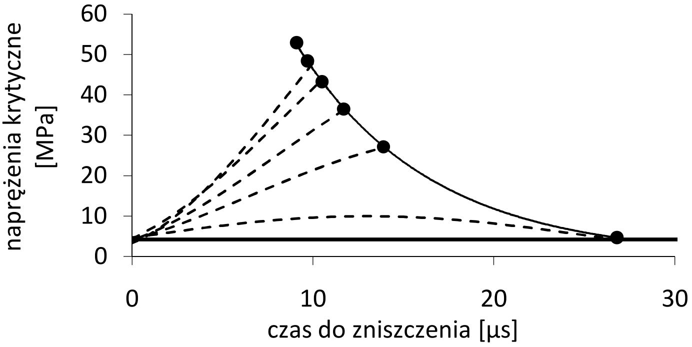


Rys. 5.4. Krytyczna krzywa w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$ dla obciążenia opisanego funkcją Haveside'a i różnych wartości amplitud

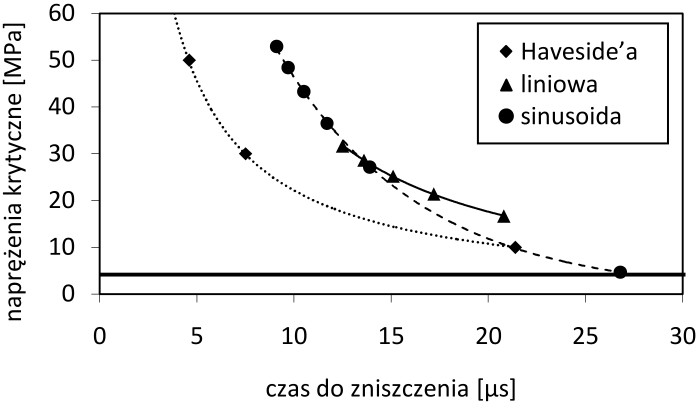
Inne kształty powierzchni zniszczenia są również dopuszczalne (Chen 1982 oraz Klisinski, Mróz 1988). Prawy koniec przekroju południkowego jest ograniczony $\xi_{\max}$. Jest to wartość, dla której $r = 0$. Gdy $k = 1$, powierzchnia zniszczenia ulega redukcji do HMH. Oznacza to, że przekrój południkowy $r - \xi$ jest w tym przypadku prostą równoległą do osi ξ.



Rys. 5.5. Krytyczna krzywa w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$ dla obciążenia opisanego funkcją liniową i różnych wartości amplitud



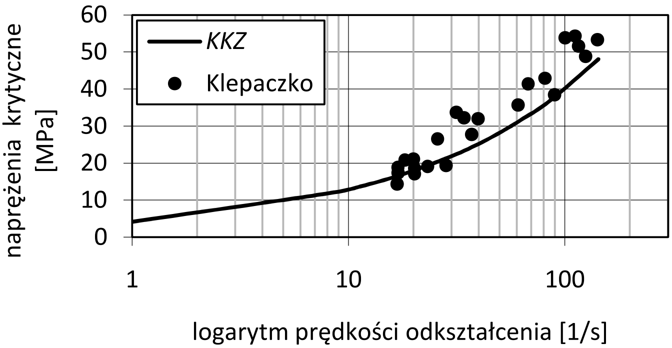
Rys. 5.6. Krytyczna krzywa w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$ dla obciążenia opisanego funkcją $\sin^2()$ i różnych wartości amplitud



t_{c0}	0,000049 s
$\alpha(T)$	0,95
σ_F^{eq}	$4{,}2e6$ Pa

Rys. 5.7. Porównanie krytycznych krzywych w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$ opisanych różnymi typami funkcji

Wartość naprężenia niszczącego dla różnych historii obciążenia jest określona przez dynamiczne *KKZ*. Pierwszą rozważaną funkcją jest funkcja Heaviside'a, w przypadku której wartość naprężeń $\sigma_F^{eq}(t)$ jest stała. Przedstawiono to na rys. 5.4, gdzie liniami przerywanymi pokazano odpowiednie amplitudy (10, 30, 50, 70, 90 MPa). Dla porównania zaznaczono również linią ciągłą wartość wytrzymałości quasi-statycznej (4,2 MPa). Zgodnie z równaniem 5.5, czas zniszczenia w przypadku przekroczenia wytrzymałości quasi--statycznej jest określony przez kryterium kumulatywne. Dla każdej amplitudy czas zniszczenia jest inny. Na podstawie danych wyznaczono krzywą krytyczną, charakterystyczną dla danego typu obciążenia w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$ (rys. 5.4). Na rysunkach 5.5 i 5.6 przedstawiono krzywe krytyczne dla dwóch innych typów obciążeń. Pierwsze obciążenie jest liniowe, drugie zmienia się sinusoidalnie, zgodnie z funkcją $\sin^2()$. Szczególnie istotny jest rys. 5.5, gdyż w testach laboratoryjnych przy wyznaczaniu wytrzymałości dynamicznej betonu (podrozdział 1.2) zakłada się stały wzrost naprężeń (stałą prędkość naprężeń i odkształceń). Na rysunkach 5.4 – 5.6 widać, że określone przez *KKZ* dla wyższych amplitud czasy zniszczenia mierzone od chwili osiągnięcia wytrzymałości quasi-statycznej są krótsze. Jest to słuszne również dla innych dowolnych historii zmian naprężeń w betonie obciążonym dynamicznie. Jednak faktem jest, że materiał przenosi większe naprężenia (obciążenia), gdy działają one krótko. Na rysunku 5.7 porównano krzywe krytyczne dla trzech omawianych wyżej rodzajów amplitud. Krzywe te wyznaczono dla tych samych parametrów konstytutywnych. Krzywa na rys. 5.8 uzyskana na podstawie *KKZ* dla stałej wartości prędkości odkształceń (patrz rys. 5.5) przechodzi przez punkty wyznaczone eksperymentalnie (Brara, Klepaczko 2006).

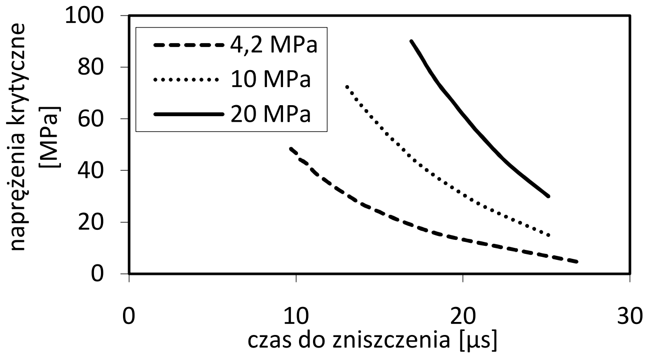


Rys. 5.8. Porównanie dynamicznej wytrzymałości na rozciąganie uzyskanej w eksperymentach i określonej na podstawie *KKZ* przy założeniu stałej prędkości odkształceń

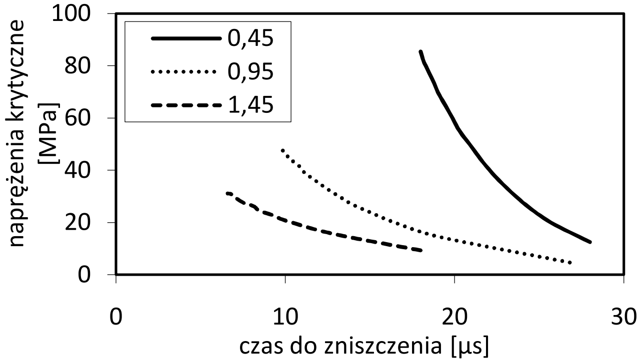
Tab. 5.1. Parametry konstytutywne betonu

E [Pa]	$35 \cdot 10^9$
v [−]	0,2
ρ [kg/m^3]	2395
k [−]	4,03
t_{c0} [s]	0,000049
α [−]	0,95
σ_{F0}^{eq} [MPa]	$4,2 \cdot 10^6$

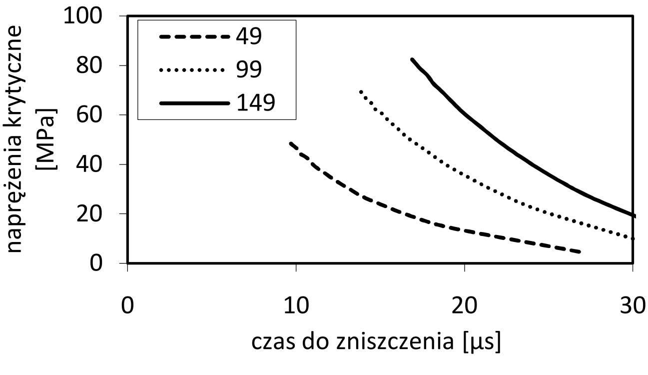
Wyżej analizowano głównie wpływ różnych historii obciążenia i parametru k na kształt powierzchni zniszczenia. Teraz należy przeanalizować wpływ parametrów konstytutywnych, takich jak σ_{F0}^{eq}, α, t_{c0}, na kształt krzywej krytycznej w przestrzeni $\sigma_F^{eq} - t_c$.



Rys. 5.9. Wpływ wytrzymałości quasi-statycznej σ_{F0}^{eq} na kształt krzywej krytycznej



Rys. 5.10. Wpływ parametru α na kształt krzywej krytycznej



Rys. 5.11. Wpływ parametru t_{c0} [µs] na kształt krzywej krytycznej

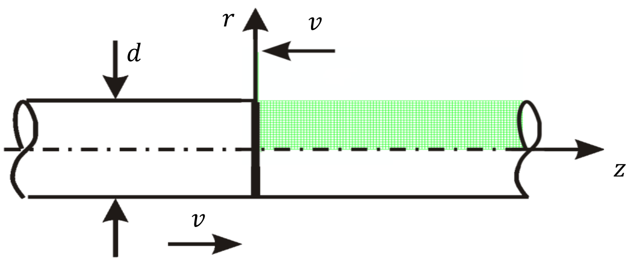
Krzywe krytyczne dla różnych wartości wytrzymałości quasi-statycznej porównano na rys. 5.9. Na tej podstawie można wywnioskować, że dla większych σ_{F0}^{eq} czas do zniszczenia t_c jest dłuższy. Osiągane naprężenia krytyczne σ_F^{eq} są również większe. Porównania dokonano tylko dla jednego typu obciążenia, a mianowicie $\sin^2()$. Wpływ zmiany parametru α, zależnego od energii pękania związanej z procesem separacji materiału, przedstawiono na rys. 5.10. Ogólnie α może być funkcją temperatury, w szczególności dla metali, jednak w prezentowanych badaniach dla betonu założono stałą wartość z zakresu od 0,45 do 1,45. W tym przypadku mniejsze wartości α określają dłuższy czas do zniszczenia t_c i większe wartości dynamicznej wytrzymałości σ_F^{eq}. Ostatnim parametrem konstytutywnym, jednak bardzo istotnym ze względu na jego interpretację (krytyczny czas do zniszczenia), jest t_{c0}. Wpływ t_{c0} na dynamiczną wytrzymałość pokazano na rys. 5.11. Wartości wszystkich parametrów konstytutywnych wykorzystanych w dynamicznych analizach numerycznych betonu zebrano w tab. 5.1.

5.2. Propagacja fali sprężystej w prętach

W literaturze przedmiotu szeroko rozważano problem interakcji fal podłużnych w zderzających się prętach (Klepaczko 1990; Ross, Thompson, Tedesco 1989 oraz Weerheijma, Van Doormaalb 2007). Taka analiza jest niezbędna, aby lepiej zrozumieć zjawiska zachodzące w prętach pomiarowych podczas testowania między innymi betonu.

Zderzenie dwóch prętów

Ważnym zadaniem w analizie numerycznej jest weryfikacja wymiarów elementów w metodzie elementów skończonych w celu oszacowania błędu rozwiązania. Jest to również istotne w przypadku modelowania numerycznego układów dynamicznych, takich jak pręt Hopkinsona. Wzajemne oddziaływanie, odbicie i przekazywanie fal naprężenia jest prawidłowo zdefiniowane wtedy, gdy gęstość siatki elementów skończonych jest wystarczająco duża. Dobrym zwyczajem jest porównanie wyników numerycznych z wynikami analitycznymi, jeśli takie istnieją. Niżej przedstawiono szczegółowo rozwiązanie analityczne Skalaka (1957) dla zderzenia podłużnego dwóch półnieskończonych prętów (rys. 5.12).



Rys. 5.12. Podłużne zderzenie dwóch półnieskończonych prętów (Skalak 1957)

Płaski stan odkształcenia założono w kierunku promieniowym oraz przyjęto więzy zapobiegające ruchowi poprzecznemu. Dzięki temu uzyskano półnieskończone medium z dominującym płaskim stanem odkształcenia w kierunku radialnym.
Przemieszczenia podczas propagacji fali wzdłuż pręta są określone równaniem:

$$u_z(z,t) = \begin{cases} -vt, & \text{gdy} \quad z > c_0 t \\ -\dfrac{z}{c_0}, & \text{gdy} \quad 0 \le z \le c_0 t \end{cases}, \tag{5.11}$$

gdzie z jest zawsze większe od zera (w każdej chwili) i wyznacza położenie fali, t jest czasem procesu, a c_0 prędkością fali sprężystej. Naprężenia w kierunku radialnym, będące wynikiem założenia płaskiego stanu odkształcenia, są następujące:

$$\tau_{rr}(a,z,t) = \frac{\lambda \partial u_z}{\partial z}, \tag{5.12}$$

gdzie a jest promieniem pręta, a λ pierwszą stałą materiałową Lamégo.
Druga część analitycznego rozwiązania dotyczy pręta nieskończonego, obciążonego od strony powierzchni swobodnej. Zapewnia ona wolną od sił boczną powierzchnię obu półnieskończonych prętów. Powyższy problem jest opisany przemieszczeniowym równaniem ruchu:

$$\begin{gathered} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varDelta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \varOmega}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varDelta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial (r\varOmega)}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{gathered}, \tag{5.13}$$

gdzie μ jest drugą stałą materiałową Lamégo, a:

$$\varDelta = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, a\ \varOmega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \tag{5.14}$$

Warunki brzegowe dla powyższych równań różniczkowych są określone w następujący sposób:

$$\begin{gathered} \tau_r|_{r=a} = R(z,t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda v}{c_1}, & \text{gdy} \quad -c_1 t \le z \le c_1 t \\ 0, & \text{gdy} \quad |z| > c_1 t \end{cases}, \\ \tau_{rz}|_{r=a} = 0\,. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Pełne analityczne rozwiązanie układu równań 5.11 – 5.15 znajduje się w pracy Skalaka. Ostatecznie rozwiązanie ma postać:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{v}{c_0}\left\{\frac{1}{6} + \int_0^{\alpha'} (\mathrm{Ai})(\alpha) d\alpha + \frac{1}{6} + \int_0^{\alpha''} (\mathrm{Ai})(\alpha) d\alpha\right\}, \tag{5.16}$$

przy czym górne granice całkowania są następujące:

$$\alpha' = \frac{z - c_0}{\sqrt[3]{3dt}}, \qquad \alpha'' = \frac{-z - c_0}{\sqrt[3]{3dt}}. \tag{5.17}$$

Całki Airy'ego, które pojawiają się w rozwiązaniu Skalaka, mają wartość:

$$(\mathrm{Ai})(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\alpha\eta + \frac{1}{3}\eta^3\right) d\eta, \tag{5.18}$$

gdzie η jest zmienną, która zanika w rozwiązaniu po scałkowaniu w granicach od 0 do ∞. Analityczne rozwiązanie zostało zakodowane i zaprezentowane w programie Maple. Pokazano je dla następujących parametrów: prędkość fali sprężystej $c_0 = 4956\ \mathrm{m/s}$, średnica pręta $d = 0{,}04\ \mathrm{m}$, prędkość zderzenia $v = 10\ \mathrm{m/s}$. Wartość prędkości fali sprężystej wynika z przyjęcia modułu Younga $70 \cdot 10^9$ Pa i gęstości $2850\ \mathrm{kg/m^3}$, czyli danych dla stopu aluminium. Instrukcje programu Maple dla przekroju oddalonego o $0{,}25\ \mathrm{m}$ od miejsca zderzenia obu półnieskończonych prętów, służące do rozwiązania ujętego w równaniach 5.11 – 5.15 problemu początkowo-brzegowego, przedstawiono w tab. 5.2, podano również cztery główne parametry zadania, górne granice całkowania, interpretację graficzną obu całek z równania 5.16 oraz znormalizowane wartości czasu i odkształceń zastosowane w ogólnym rozwiązaniu Skalaka.

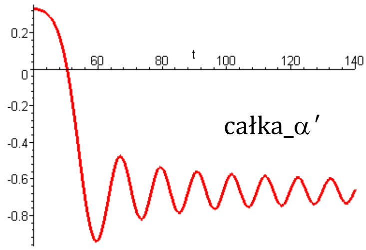
Tab. 5.2. Procedura zakodowana w Maple

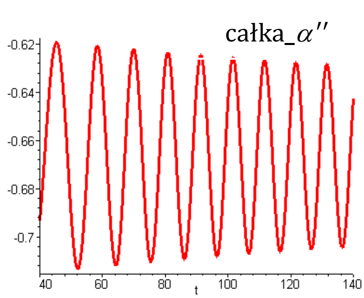
Główne dane:

$c_0 = 4956$
$z = 0{,}25$
$d = 0{,}04$
$v = 10$
$\alpha' = (z - c_0 t)/(3dt)^{1/3}$
$\alpha'' = (-z - c_0 t)/(3dt)^{1/3}$

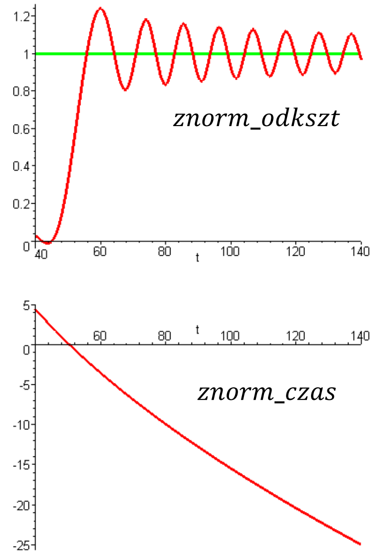
Obliczenie obu całek z równania 5.16 i ich wykresy

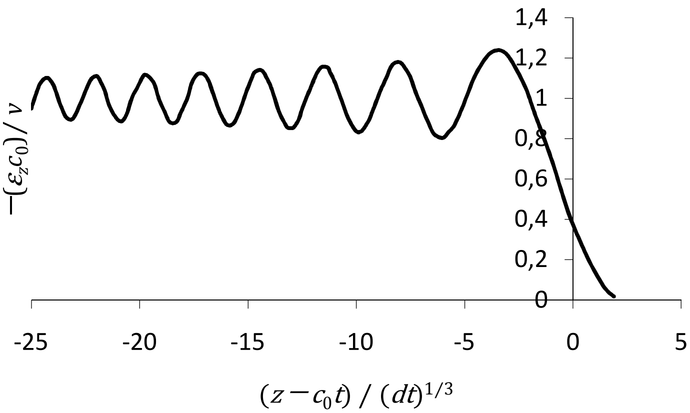
całka_$\alpha' = \boldsymbol{int}(\boldsymbol{AiryAi}(x), x = 0..\alpha')$
$\boldsymbol{plot}($całka_$\alpha', t = 40..140)$
całka_$\alpha'' = \boldsymbol{int}(\boldsymbol{AiryAi}(x), x = 0..\alpha'')$
$\boldsymbol{plot}($całka_$\alpha'', t = 40..140)$





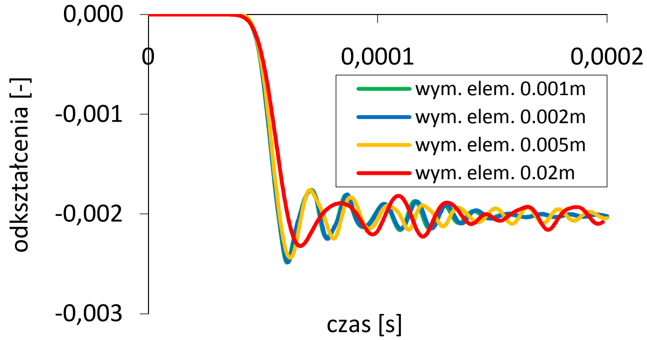
Tab. 5.3. Procedura zakodowana w Maple c.d.

Obliczenie znormalizowanego odkształcenia i czasu z równania 5.16 oraz ich wykresy $znorm\_odkszt := -(\text{całka}\_\alpha' + \text{całka}\_\alpha'' + 1/3)$ $\boldsymbol{plot}([znorm\ odkszt, 1], t = 40..140)$ $znorm\_czas := (z - c_0 t)/(dt)^{1/3}$ $\boldsymbol{plot}(znorm\_czas, t = 40..140)$	

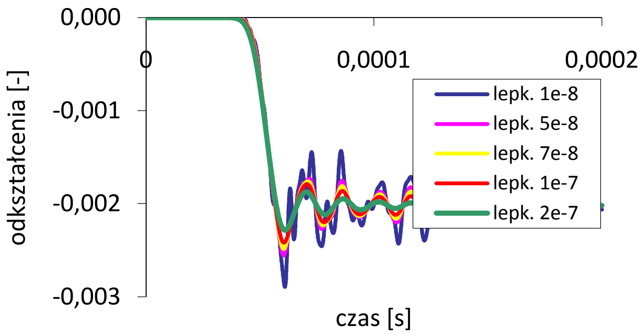


Rys. 5.13. Przewidywana w rozpatrywanym przekroju fala odkształcenia (Skalak 1957 oraz Jankowiak, Klepaczko, Łodgowski 2006)

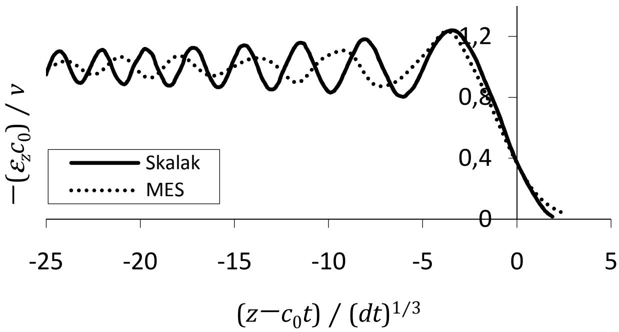
Przewidywaną zmienną w czasie wartość znormalizowanego odkształcenia $-(\varepsilon_z c_0)/v$ w funkcji znormalizowanego czasu $(z - c_0 t)/(dt)^{1/3}$ przedstawiono na rys. 5.13. Rozwiązania numeryczne uzyskane metodą elementów skończonych dla siatek elementów skończonych różnej gęstości (0,02 – 0,001 m) są porównane ze sobą i z rozwiązaniem analitycznym Skalaka dla różnych wartości ($1e^{-8}$ – $2e^{-7}$) tłumienia. Przewaga metody elementów skończonych polega na tym, że można otrzymać prawidłową propagację i interakcję fal na skutek zderzenia prętów z najogólniejszej postaci dynamicznego równania ruchu, w której są uwzględnione skutki nieliniowości.



Rys. 5.14. Historia odkształceń dla różnych wielkości elementów skończonych



Rys. 5.15. Numerycznie obliczona historia odkształceń dla różnych wartości lepkości



Rys. 5.16. Porównanie wyników analitycznych i numerycznych obliczeń znormalizowanego odkształcenia w funkcji znormalizowanego czasu

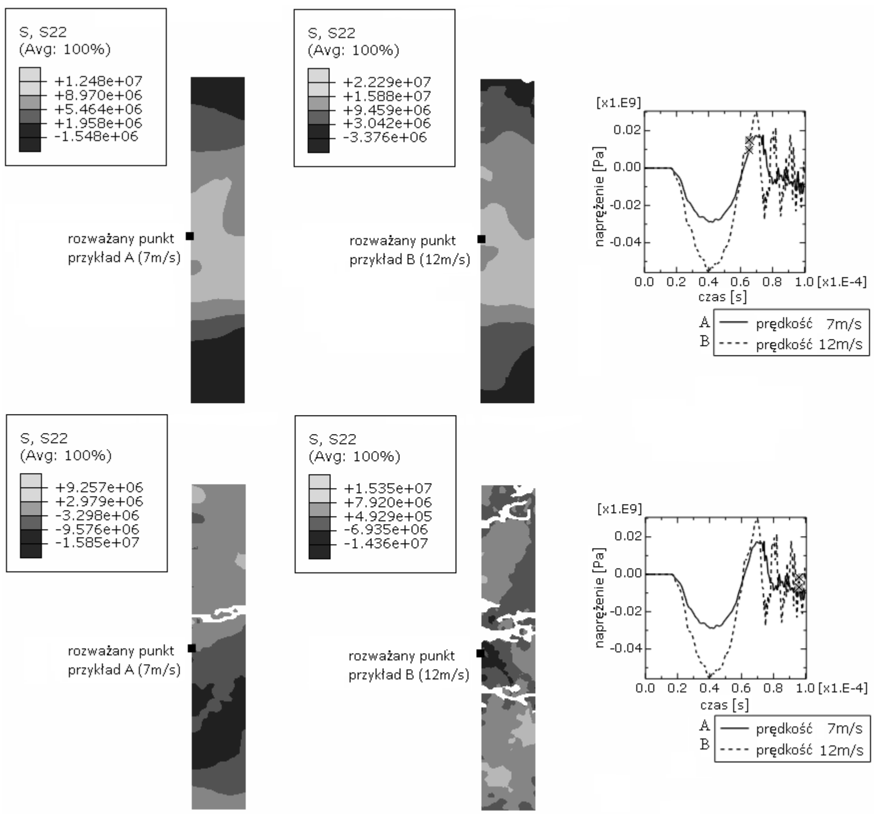
Osiowosymetryczny model numeryczny wraz z warunkami brzegowymi przedstawiono na rys. 5.12 (Skalak 1957). Przyjęto sprężyste parametry materiałowe stopu aluminium. W modelu MES po zderzeniu dwóch półnieskończonych prętów fala odkształceń podłużnych jest geometrycznie tłumiona (zmniejszenie amplitudy drgań). Znormalizowana wartość odkształceń $-(\varepsilon_z c_0)/v$ oscyluje wokół wartości równej jeden, identycznie jak w rozwiązaniu Skalaka. Widać również wpływ wielkości elementu skończonego na propagację fali podłużnej w pręcie. Dla wielkości elementu równej 0,02 m okres drgań jest dłuższy. Wraz ze zmniejszeniem wielkości elementów przebieg zmian znormalizowanych odkształceń jest zbieżny. Dla najmniejszych wymiarów elementów, czyli 0,001 m i 0,002 m, oraz parametru tłumienia równego 7e^{-8} wyniki są identyczne, co pokazano na rys. 5.14. Wpływ tłumienia przedstawiono na rys. 5.15. Testy numeryczne z użyciem różnych wartości tłumienia wykazały, że dla najmniejszej wartości 1e^{-8} występują duże oscylacje odkształceń podłużnych (rys. 5.15). Jakościowe i ilościowe porównanie wyników (rys. 5.16) uzyskanych w programie Abaqus/Explicit z analitycznym rozwiązaniem Skalaka pokazuje, jak ważny jest dobór wielkości elementów skończonych i parametru tłumienia.

5.3. Weryfikacja eksperymentu z prętem Hopkinsona

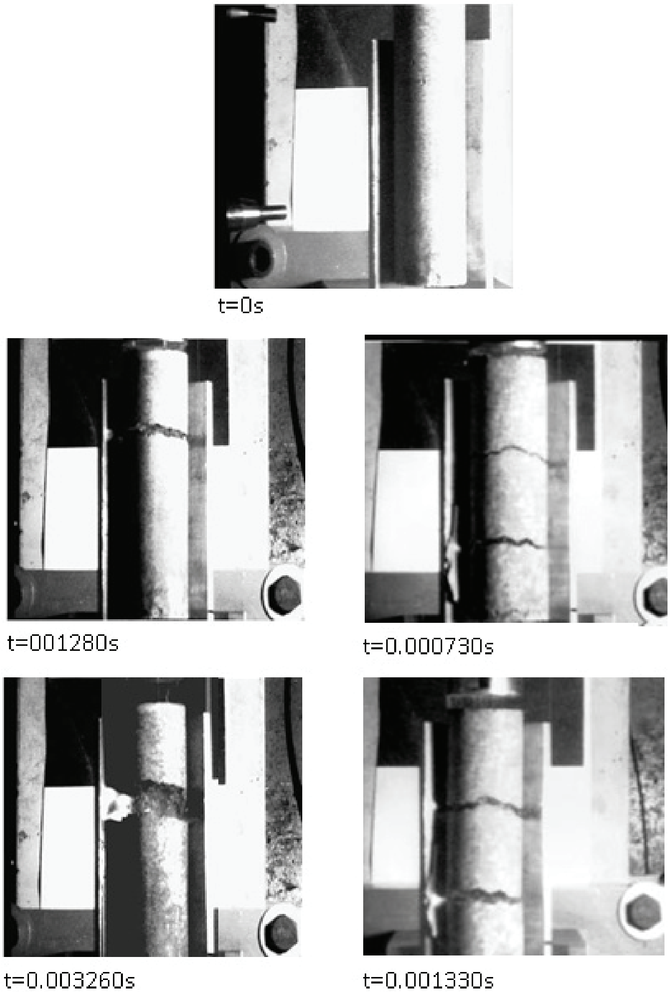
Pręt Hopkinsona odgrywa ważną rolę w testowaniu dynamicznych właściwości mechanicznych betonu (patrz podrozdział 1.2). Pierwsza cześć numerycznych obliczeń dynamicznych z uwzględnieniem dynamicznego kumulatywnego kryterium zniszczenia (równanie 5.18) ma na celu weryfikację eksperymentu z użyciem pręta Hopkinsona (Klepaczko 1990 oraz Brara, Klepaczko 2006). Prezentowane w tym podrozdziale modele numeryczne dotyczą jednego z możliwych eksperymentów, rozwiniętego w LPMM (Uniwersytet w Metz). W modelach tych uwzględniono opisane w podrozdziale 5.1 dynamiczne kryterium zniszczenia.

Beton poddany działaniu szybkich obciążeń dynamicznych, które wywołują dużą prędkość odkształceń, wykazuje przyrost wytrzymałości zarówno przy rozciąganiu, jak i przy ściskaniu. Przyrost wytrzymałości przy rozciąganiu jest większy, co zostało uwzględnione w normach (CEB 1987) i opisane w podrozdziale 1.2. W praktyce inżynierskiej często się pomija przenoszenie przez beton naprężeń rozciągających. Stosuje się zbrojenie i ignoruje przyrost wytrzymałości odpowiadający wystąpieniu znacznych prędkości odkształceń. Określenie wytrzymałości betonu na ściskanie jest istotne w analizie przebicia konstrukcji (Smith, Hetherington 1994), gdyż na skutek interakcji fal i ich odbicia od powierzchni swobodnej pojawia się najczęściej rozciągająca fala naprężeń, która powoduje powstawanie odprysku. Przeprowadzenie doświadczenia laboratoryjnego mającego na celu określenie wytrzymałości betonu na rozciąganie jest trudne nawet dla obciążenia quasi-statycznego. Dla obciążeń dynamicznych określenie wytrzymałości jest trudniejsze i możliwe tylko na podstawie analizy zjawisk zachodzących w próbce betonowej, pręcie Hopkinsona na skutek uderzenia pocisku, a mianowicie propagacji i interakcji fal (Brara 1999 oraz Klepaczko 1990). Zasadniczą część przyrządów eksperymentalnych stanowi aluminiowy pręt długości 1 m o średnicy 0,04 m. Pręt ten jest uderzany z jednej strony przez pocisk aluminiowy tej samej średnicy i długości 0,08 m.

Analizowana walcowa próbka betonowa ma długość 0,12 m. Powierzchnie styku pręta aluminiowego i próbki betonowej są idealnie dopasowane. Aby jak najlepiej oddać mechanizm zniszczenia próbki betonowej, uwzględniono wnioski płynące z podrozdziału 5.2. W dalszych analizach numerycznych zastosowano optymalną wielkość elementu skończonego. Przyjęto osiowosymetryczny model numeryczny (elementy typu CAX4R wielkości 0,001 m). Aluminiowe części mają moduł Younga $E = 70 \cdot 10^9$ Pa, liczbę Poissona $v = 0{,}28$ oraz gęstość $\rho = 2850\ \mathrm{kg/m^3}$. Założono liniowo-sprężystą charakterystykę materiału, gdyż części wykonane z aluminium pracują w tym zakresie. W odniesieniu do betonu także założono liniowo-sprężystą charakterystykę i kruche zniszczenie zależne od prędkości odkształceń. Wykorzystano kumulatywne kryterium zniszczenia betonu, które zapewnia dużą zgodność z eksperymentem (patrz rys. 5.8). Parametry konstytutywne użyte w analizie numerycznej dla części betonowej to moduł Younga $E = 35 \cdot 10^9$ Pa, liczba Poissona $v = 0{,}2$, gęstość $\rho = 2395\ \mathrm{kg/m^3}$, współczynnik asymetrii ściskanie – rozciąganie $k = 4{,}03$, krytyczny czas $t_{c0} = 49$ µs, współczynnik związany z energią aktywowaną podczas pękania $\alpha = 0{,}95$ oraz ekwiwalentne naprężenie rozciągające $\sigma_{F0}^{eq} = 4.2 \cdot 10^6$ Pa (patrz tab. 5.1).



Rys. 5.17. Porównanie mechanizmów zniszczenia w próbach numerycznych dla dwóch prędkości pocisku: 7 m/s i 12 m/s



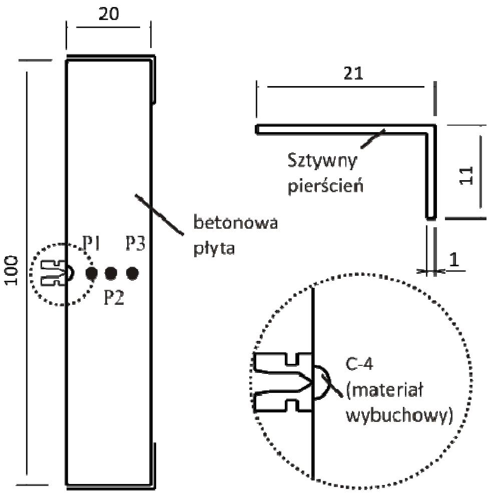
Rys. 5.18. Porównanie mechanizmów zniszczenia w eksperymentalnych próbach dla dwóch prędkości pocisku: 7 m/s i 12 m/s (Brara 1999)

Wyniki przykładowych analiz numerycznych z użyciem programu Abaqus/Explicit, weryfikujących kryterium zniszczenia betonu, gdy prędkość pocisku wynosiła 7 m/s i 12 m/s, przedstawiono na rys. 5.17. Numeryczne analizy metodą elementów skończonych prowadzono aż do zniszczenia przez rozerwanie części betonowej. Na rysunku 5.17 przedstawiono również zmianę w czasie naprężenia podłużnego. Zaobserwowano moment dojścia do punktu całkowania przy osi symetrii (Crisfield 1991) fali naprężeń ściskających oraz pojawienie się naprężeń rozciągających po odbiciu od powierzchni swobodnej.
Zniszczenie betonu w próbach laboratoryjnych i numerycznych następuje w wyniku rozciągania, mimo że początkowo próbka betonowa jest ściskana. Pierwotne ściskanie jest

spowodowane uderzeniem w próbkę pręta aluminiowego po jego interakcji falowej z wystrzelonym pociskiem. Gdy prędkość pocisku wynosiła 7 m/s, w obliczeniach numerycznych jedno pęknięcie pojawiało się w odległości 55 mm od powierzchni kontaktu. W testach laboratoryjnych pęknięcie zaobserwowano w różnych miejscach, jednak zawsze w strefie środkowej (Brara 1999). Na rysunku 5.18 pokazano próbkę betonową, w której zniszczenie wystąpiło bliżej powierzchni swobodnej. Gdy prędkość pocisku była większa, obserwowano pojawienie się kilku pęknięć. Tutaj zaprezentowano wyniki dla prędkości 12 m/s. Zarówno w eksperymencie laboratoryjnym, jak i numerycznym przy tej prędkości pojawiły się dwa niezależne pęknięć. Kolejność i miejsce ich wystąpienia są zgodne. Pierwsze pęknięcie wystąpiło w odległości 80 mm od powierzchni uderzenia, a drugie około 55 mm od powierzchni uderzenia.

5.4. Weryfikacja eksperymentu z płytą okrągłą obciążoną eksplozją materiału wybuchowego

Celem drugiego eksperymentu numerycznego była weryfikacja kumulatywnego kryterium zniszczenia w trójosiowym stanie naprężenia (Gatuingt, Pijaudier-Cabot 2002). Badano płytę okrągłą, której geometrię przedstawiono na rys. 5.19. Płyta była obciążona eksplozją materiału wybuchowego C-4 wklejonego w półsferyczny otwór zlokalizowany w jej środku. Na obwodzie była ona swobodnie podparta sztywnym stalowym pierścieniem (rys. 5.19) stanowiącym więzy jednostronne, modelowane numerycznie jako kontakt. W eksperymencie laboratoryjnym w wyniku eksplozji powstał sferyczny odprysk. Dodatkowo zarejestrowano wartości naprężeń w trzech punktach znajdujących się w osi symetrii (P1, P2 oraz P3 na rys. 5.19). W momencie powstania odprysku pomiary zostały przerwane.



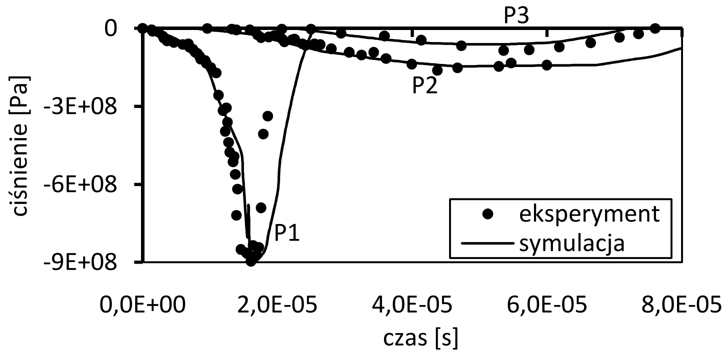
Rys. 5.19. Geometria i warunki brzegowe okrągłej płyty (Gatuingt,Pijaudier-Cabot 2002)

Tab. 5.4. Parametry materiałowe C-4

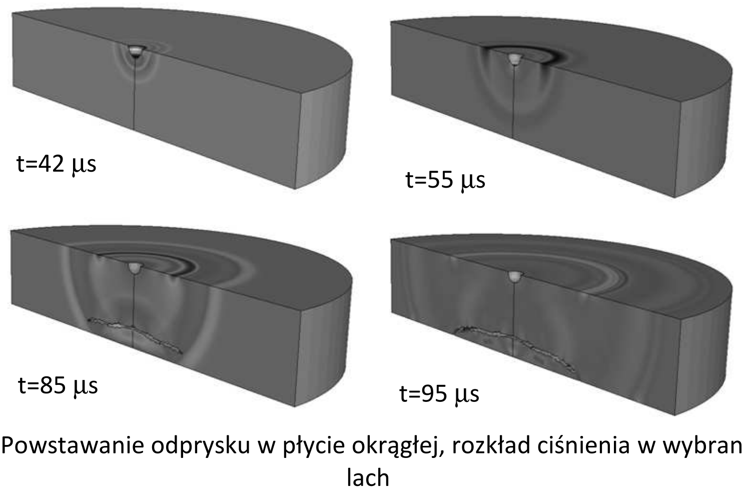
A	5,98 10^{11} Pa
B	0,13 10^{11} Pa
R_1	4,5
R_2	1,5
E_{m0}	5,43 10^{6} J/kg
ω	0,32
v_d	8040 m/s
ρ_0	1601 kg/m^3

Zarówno materiał wybuchowy, jak i płytę betonową dyskretyzowano z użyciem elementów CAX4R oraz CAX3 o długości charakterystycznej 0,001 m z dominującą liczbą elementów pierwszego typu (Hibbitt, Karlsson, Sorensen 2005). Parametry konstytutywne użyte w analizie numerycznej części betonowej podano w tab. 5.1. Podstawę, na której opiera się płyta, modelowano jako ciało nieskończenie sztywne. Materiał wybuchowy modelowano z wykorzystaniem równania stanu Jonesa-Wilkinsa-Lee (Jankowiak, Łodygowski, Sielicki 2007), które pozwala określić wartość ciśnienia p w punkcie całkowania (Crisfield 1991) w zależności od aktualnej gęstości ρ oraz energii wewnętrznej sprowadzonej do jednostkowej masy E_{m0} materiału wybuchowego:

$$
\begin{aligned}
p(\rho, E_{m0}) = A\left(1 - \frac{\omega\rho}{R_1\rho_0}\right)\cdot \exp\left(-R_1\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \\
+B\left(1 - \frac{\omega\rho}{R_2\rho_0}\right)\cdot \exp\left(-R_2\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \frac{\omega\rho^2}{\rho_0}E_{m0}\,.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$



Rys. 5.20. Zmiana ciśnienia w czasie wybuchu w trzech punktach w eksperymencie laboratoryjnym (Gatuingt, Pijaudier-Cabot 2002) i numerycznym

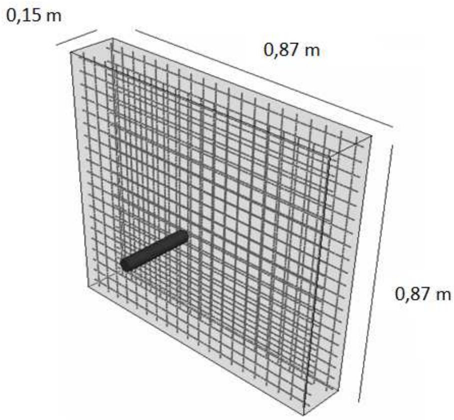


Rys. 5.21. Powstawanie odprysku w płycie okrągłej, rozkład ciśnienia w wybranych chwilach

Równanie 5.19 opisuje falę ciśnienia generowaną przez energię chemiczną wybuchu. Parametry konstytutywne materiału wybuchowego użyte w analizie numerycznej przedstawiono w tab. 5.3, gdzie A, B, R_1, R_2, ω to stałe materiałowe, ρ_0 jest gęstością początkową, c_v ciepłem właściwym, a v_d prędkością spalania materiału wybuchowego C-4. Po detonacji w materiale wybuchowym C-4 propaguje się fala naprężeń, która dociera do płyty betonowej. Ściskająca kulista fala propaguje się przez całą grubość płyty, następnie odbija się od powierzchni swobodnej i powraca jako fala naprężeń rozciągających. Po przekroczeniu wytrzymałości dynamicznej materiał ulega rozerwaniu i powstaje sferyczny odprysk. Identyczne zjawiska falowe zachodzą w modelu numerycznym. Dodatkowo podczas eksperymentu laboratoryjnego w płycie betonowej powstaje krater. W symulacji to zjawisko nie występuje, gdyż wysokie ujemne ciśnienie (trójosiowe ściskanie) nie powoduje zniszczenia w betonie (rys. 5.3). Mimo to wyniki numeryczne i eksperymentalne są zgodne. Forma zniszczenia jest taka sama – pojawia się odprysk o wymiarze 510 mm. Również historia zmian naprężeń w trzech wybranych punktach jest zgodna, przynajmniej do momentu zniszczenia aparatury pomiarowej w eksperymencie, co zaprezentowano na rys. 5.20 (Gatuingt, Pijaudier-Cabot 2002). Powstawanie odprysku pokazano dla konkretnych chwil mierzonych od momentu detonacji ładunku.

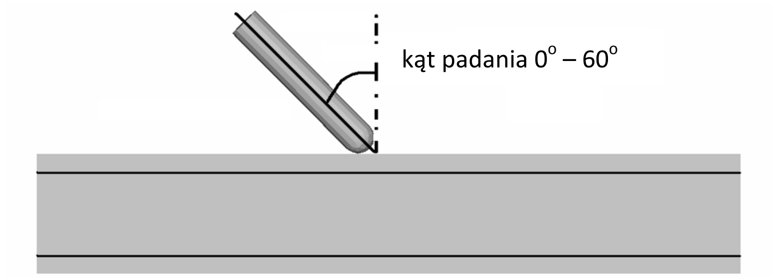
5.5. Analiza numeryczna perforacji płyty betonowej i żelbetowej przez pocisk

Kolejnym przykładem użycia *KKZ* jest analiza przebicia przez pocisk płyty betonowej i płyty betonowej zbrojonej. Analiza ta jest istotna z punktu widzenia bezpieczeństwa budowli.



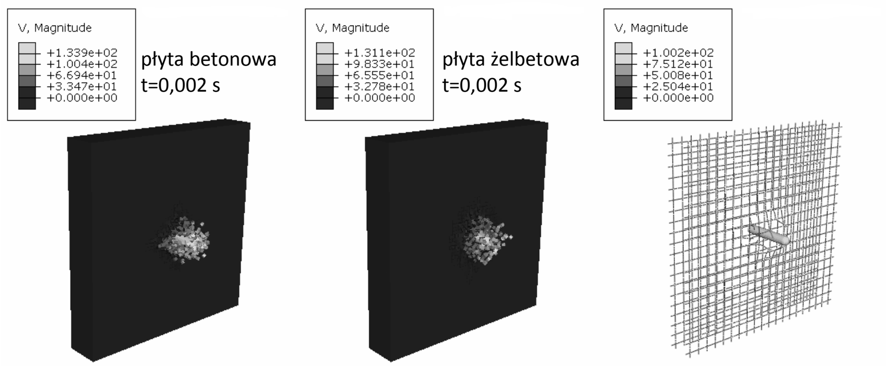
Rys. 5.22. Widok płyty żelbetowej i pocisku

Przedstawiono dynamiczną analizę numeryczną dwóch struktur betonowych: zbrojonej podwójną siatką stalową oraz niezbrojonej. Rozważana płyta jest kwadratowa, a ewentualne zbrojenie jest modelowane jako dwuwęzłowe elementy kratowe T3D2 o liniowej aproksymacji przemieszczeń. Beton dyskretyzowano za pomocą elementów skończonych C3D8R (trójwymiarowe, ośmiowęzłowe o zredukowanym całkowaniu i z kontrolą klepsydrowania). Ze względu na analizę przebicia płyty betonowej przyjęto 33 640 elementów sprężystych, połączonych za pomocą 217 635 elementów sprężystych, w których zastosowano *KKZ*. W płycie żelbetowej zbrojenie wklejono w beton. Ostatnim elementem modelu numerycznego jest sztywny, stalowy pocisk.



Zbrojenie	
Powierzchnia pręta	0,0001 m^2
Odstęp między prętami	0,0434 m
Odstęp między zbrojeniem górnym i dolnym	0,1 m
Pocisk	
Średnica	0,04 m
Długość	0,22 m
Masa	1,88 kg
Prędkość	200 m/s

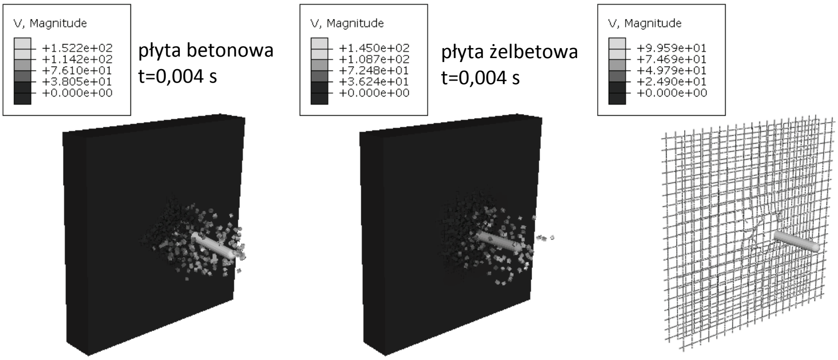
Rys. 5.23. Geometria płyty betonowej, zbrojenia oraz pocisku



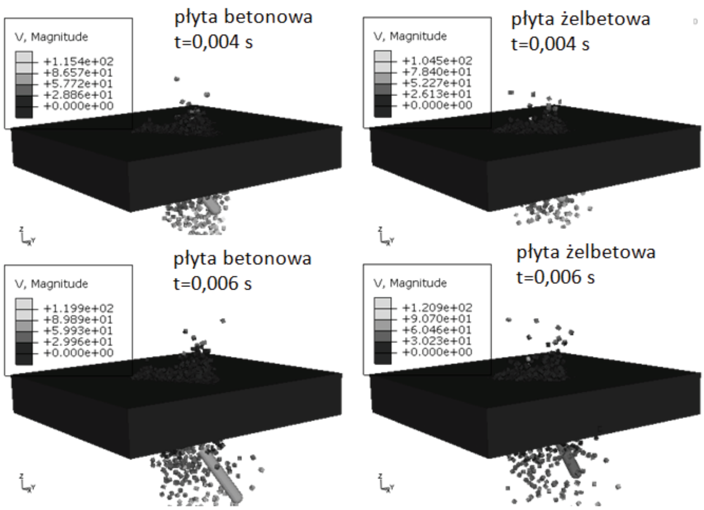
Rys. 5.24. Rozkład prędkości w chwili 0,002 s dla kąta padania 0° (widok obu płyt od tyłu)

Długość boku płyty kwadratowej wynosi 0,87 m i grubość 0,15 m (rys. 5.22). Założono również, że odległość między prętami zbrojenia (każdy o powierzchni przekroju 0,0001 m^2)

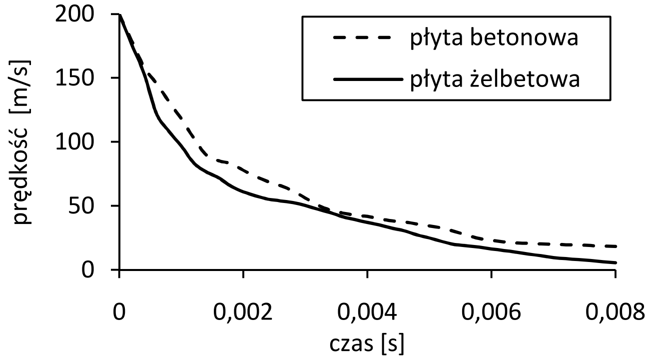
to 0,0434 m. W płycie żelbetowej przyjęto dwie warstwy zbrojenia odległe o 0,1 m. Płyta została zamocowana na obwodzie. Analizowano kierunek uderzenia pocisku, co przedstawiono na rys. 5.23. Kąt natarcia zmieniał się od 0^{o} do 60^{o}, przy czym 0^{o} oznaczało prostopadłe przebijanie płyty przez pocisk. Wymiary i szczegółową geometrię zewnętrzną pocisku przedstawiono na rys. 5.23. We wszystkich analizowanych przypadkach pocisk długości 0,22 m i średnicy 0,04 m (masa 1,88 kg) penetruje płyty z prędkością początkową 200 m/s.
W modelowaniu przebicia konstrukcji istotne jest prawidłowe modelowanie kontaktu pomiędzy pociskiem a płytą betonową i zbrojeniem. Istotne jest uwzględnienie nie tylko kontaktu z zewnętrzną powierzchnią konstrukcji, ale również z wewnętrzną, powstającą po zniszczeniu elementów na powierzchni. Założono prawo tarcia Coulomba ze współczynnikiem tarcia równym 0,2. Początkową konfigurację schematycznie przedstawiono na rys. 5.23.



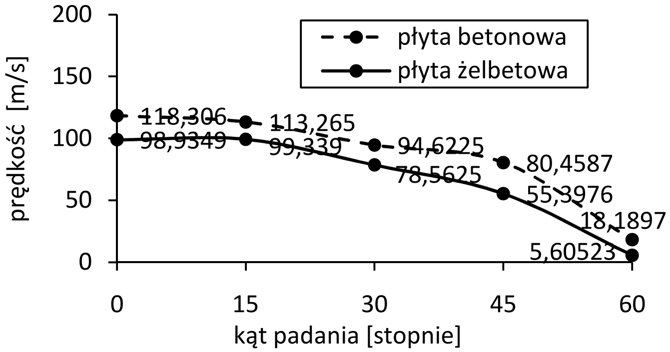
Rys. 5.25. Rozkład prędkości w chwili 0,004 s dla kąta padania 0^{o} (widok obu płyt od tyłu)



Rys. 5.26. Rozkład prędkości w chwili 0,004 s i 0,006 s dla kąta padania 45^{o}



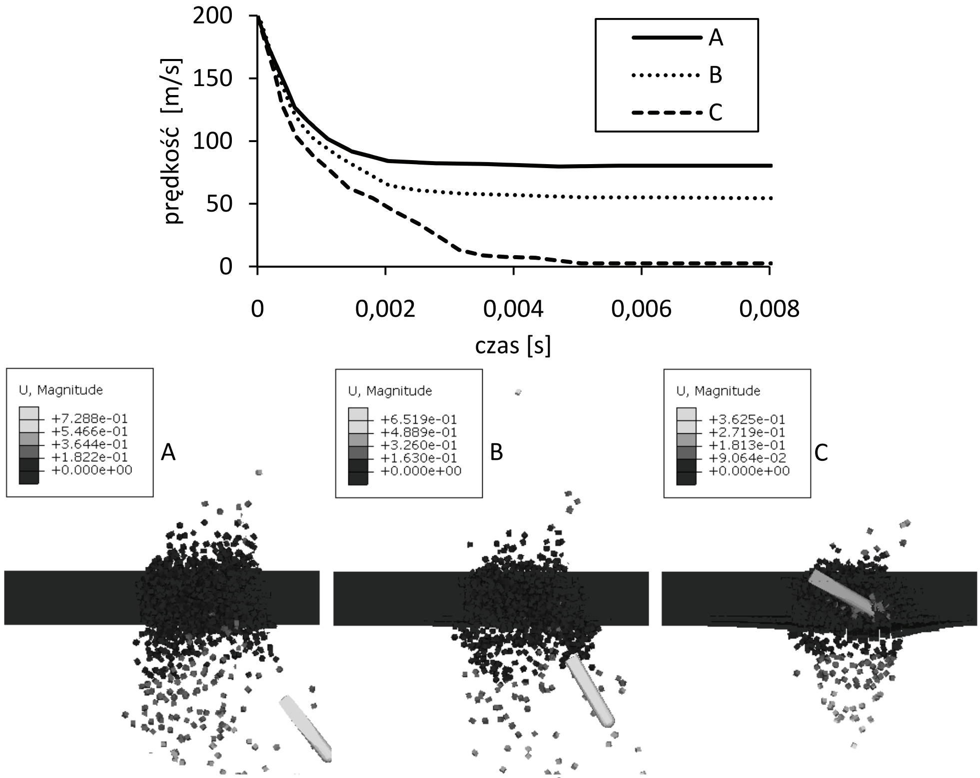
Rys. 5.27. Zmiana prędkości pocisku podczas przebijania płyty pod kątem 60°



Rys. 5.28. Prędkość resztkowa pocisku

Porównano wyniki kilku analiz numerycznych obu typów płyt dla różnych kątów padania: 0^{o}, 15^{o}, 30^{o}, 45^{o} i 60^{o}. Na rysunkach 5.24 i 5.25 przedstawiono rozkłady prędkości w dwóch wybranych chwilach dla obu płyt i pocisku padającego pod kątem 0^{o}. Dodatkowo przedstawiono deformację zbrojenia płyty. Resztkowa prędkość pocisku wynosi 118 m/s po przejściu przez betonową płytę oraz 99 m/s po przejściu przez płytę zbrojoną (rys. 5.28).
W kolejnym rozważanym wariancie kąt padania pocisku wynosi 45^{o}. Dla tego kąta padania na rys. 5.26 przedstawiono rozkład prędkości w modelu numerycznym dla płyty bez zbrojenia i ze zbrojeniem. W obu przypadkach nastąpiło przebicie konstrukcji. Wystąpiła znacząca zmiana prędkości i zakrzywienie toru pocisku. Przy największym rozpatrywanym kącie padania, wynoszącym 60^{o}, pocisk nie przebija płyt na wylot. Na skutek interakcji pocisk – zbrojenie i tarcia pocisku o wewnętrzną powierzchnią kontaktową dochodzi do odbicia pocisku od dolnej powierzchni płyty. Na rysunku 5.27 przedstawiono zmianę prędkości pocisku dla płyty ze zbrojeniem i bez zbrojenia. Mimo że w obu przypadkach różnica prędkości pocisku jest niewielka, jej spadek jest porównywalny, to zniszczenie płyty niezbrojonej jest większe. Jednak, jak już wspomniano, do całkowitego przebicia nie dochodzi. Na rysunku 5.28 przedstawiono prędkość resztkową dla wszystkich rozważanych przypadków. Różnice między prędkościami resztkowymi są podobne dla wszystkich kątów pa-

dania na obie płyty. To oznacza, że dla szerokiego zakresu prędkości padania wpływ zbrojenia na polepszenie dynamicznej wytrzymałości płyty jest podobny.



Rys. 5.29. Skutki padania pocisku pod kątem 45^{o} w chwili 0,008 s dla: A – płyty bez zbrojenia, B – płyty ze zbrojeniem, C – płyty ze zbrojeniem zagęszczonym oraz wykres prędkości pocisku

Na rysunku 5.29 pokazano, w jaki sposób na poprawę dynamicznej nośności betonowej płyty wpływa jej dozbrojenie. Gdy zbrojenie jest dwa razy gęstsze, pocisk padający pod kątem 45^{o} nie przebija płyty, lecz zatrzymuje się na dolnym zbrojeniu wewnątrz płyty.

Podsumowanie

Najważniejsze oryginalne dokonania zaprezentowane w monografii to:

- Przedstawienie dwóch metod losowania struktury betonowej, czyli jednorodnej i zdeterminowanej, które posłużyły do określenia gęstości dyskretyzacji i wielkości reprezentatywnej objętości w stosunku do wymiarów największego kruszywa.
- Wykorzystanie homogenizacji numerycznej do znalezienia parametrów konstytutywnych niejednorodnej struktury betonowej, które następnie zostały użyte do obliczeń wybranych konstrukcji betonowych (czteropunktowo zginanych belek z nacięciem i innych).
- Przedstawienie wybranych quasi-statycznych kryteriów zniszczenia z określeniem metody identyfikacji parametrów na podstawie wymaganej liczby punktów identyfikacyjnych. Zaprezentowanie zamkniętych wzorów, które służą do obliczenia parametrów konstytutywnych omawianych kryteriów na podstawie testów laboratoryjnych.
- Zaprezentowanie wszystkich omawianych kryteriów zniszczenia w przekrojach południkowym i dewiatorowym. Dzięki temu przedstawiono wpływ kolejnych parametrów na kształt powierzchni zniszczenia w obu przekrojach. Zaprezentowano również kształt powierzchni zniszczenia w płaskim stanie naprężenia, tzn. gdy $\sigma_3 = 0$.
- Przedstawienie energetycznej interpretacji wybranych kryteriów i wpływu energii odkształcenia objętościowego na graniczną wartość energii odkształcenia postaciowego w wybranych kryteriach.
- Zaprezentowanie znanej hipotezy Burzyńskiego – zmiennej krańcowej energii odkształcenia objętościowo-postaciowego – która może stanowić uogólnienie niektórych późniejszych kryteriów (np. kryterium Mroza).
- Szczegółowe przedstawienie modelu betonu plastycznego ze zniszczeniem wraz ze szczegółowym opisem sposobu identyfikacji parametrów konstytutywnych oraz ich interpretacja.
- Uzyskanie wiarygodnych wyników obliczeń numerycznych zarówno konstrukcji betonowych, czyli symetrycznie i asymetrycznie czteropunktowo zginanych belek z nacięciem, jak i konstrukcji zespolonej w postaci czteropunktowo zginanego ściskanego zespolonego słupa stalowo-betonowego. Wiarygodność wyników potwierdzono przez ich odniesienie do eksperymentów laboratoryjnych.

- Przedstawienie sposobu uogólnienia kumulatywnego kryterium zniszczenia na przypadek trójwymiarowego stanu naprężenia z uwzględnieniem naprężeń ekwiwalentnych.
- Szczegółowe zaprezentowanie wpływu parametrów konstytutywnych na kształt powierzchni zniszczenia oraz określenie czasu do zniszczenia dla różnych historii obciążenia.
- Weryfikacja kumulatywnego kryterium zniszczenia na podstawie dwóch laboratoryjnych eksperymentów, w których powstaje odprysk betonu, a mianowicie na podstawie testu z użyciem pręta Hopkinsona oraz okrągłej płyty obciążonej eksplodującym materiałem wybuchowym.

Dalsze badania będą poświęcone zastosowaniu kryteriów zniszczenia do oceny bezpieczeństwa istniejących i projektowanych konstrukcji żelbetowych.

Literatura

Abbo A., Sloan S. (1995), A smooth hyperbolic approximation to the mohr-coulomb yield criterion, *Computers and Structures*, 54 (3), 427 – 441.

Abrams A. (1917), Effect of rate application of load on the compressive strength of concrete, *Proc. Amer. Soc. Testing Materials*, 17, 364 – 377.

Alia A., Souli M. (2006), High explosive simulation using multi-material formulations, *Applied Thermal Engineering*, 26, 1032 – 1042.

Alzebdeh K., Ostoja-Starzewski M. (1996), Micromechanically based stochastic finite elements: length scales and anisotropy, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 11, 205 – 214.

Barsoum M., Ganguly A., Hug G. (2006), Microstructural Evidence of Reconstituted, *Journal of the American Ceramic Society*, 89, 3788 – 3796.

Bąk G., Stolarski A. (1990), *Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo*, Warszawa, PAN KILiW.

Bell J. F. (1966), An experimental diffraction grating study of the quasi-static hypothesis of the SHPB experiment, *J. Mech. Phys. Solids.*, 14, 309 – 327.

Belytschko T., Black T. (1999), Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 45, 601– 620.

Belytschko T., Liu W., Moran B. (2000), *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, New York, Wiley.

Bischoff P., Perry S. (1991), Compressive behaviour of concrete at high strain rate, *Materials and Structures*, 24, 425 – 450.

Bobinski J., Tejchman J. (2006), Modelling of size effects in concrete using elasto-plasticity with non-local softening, *Archives of Civil Engineering* , 52 (1), 7– 35.

Brara A. (1999), *Etude experimentale de la traction dynamique du betonpar ecaillage*, Metz, LPMM URA CNRS 1215.

Brara A., Klepaczko J. (2006), Experimental characterization of concrete in dynamic tension, *Mechanics of Materials*, 38, 253 – 267.

Brara A., Camborde F., Klepaczko J., Mariotti C. (2001), Experimental and numerical study of concrete at high strain rates in tension, *Mechanics of Materials*, 1 (33), 33 – 45.

Bresler B., Pister K. (1958), Strength of Concrete under Combined Stresses, *J. Am. Concr. Inst.*, 55, 321 – 345.

Burzyński W. T. (1928), *Studium nad hipotezami wytężenia*, Lwów, Akademia Nauk Technicznych.
Buyukozturk O. (1977), Nonlinear analysis of reinforced concrete structures, *Computer and Structures*, 7, 47 – 72.
Campbell J. (1953), The dynamic yielding of mild steel, *Acta Metall*., 1, 706 – 710.
CEB (1987), *Concrete structure under impact and impulsive loading*, Lausanne.
Chen A., Chen W. (1975), Constitutive relation for concrete*, J. Engng. Mech. Div*., 101, 465 – 481.
Chen W. (1982), *Plasticity in reinforced concrete*, New York, McGraw-Hill.
Crisfield M. (1991), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, New York, Wiley.
Cundall P., Strack O. (1979), A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, 1 (29), 47 – 65.
Davies J. (1996), Observation of fracture path development in mortar beam speciments, *Advn. Cem. Bas. Mat.*, 3, 31 – 36.
Demortier G. (2006), PIXE, PIGE and NMR study of the masonry of the pyramid of Cheops at Giza, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*, 226, 98 – 109.
Drucker D. (1959), A definition of stable inelastic materials, *J. Appl. Mech.*, 26 (81), 101 – 106.
Drugan W., Willis J. (1996), A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites, *J. Mech Phys. Solids*, 44, 497 – 524.
Feldman R., Beaudoin J. (1976), Microstructure and strength of hydrated cement, *Cement and Concrete Research*, 3, 389 – 400.
Freund L. (1993), *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press.
Gambin B. (1986), *Opis właściwości ciał sprężystych losowo niejednorodnych*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.
Gambin B. (2006), *Wpływ mikrostruktury na właściwości kompozytów sprężystych, piezoelektrycznych i termosprężystych*, Warszawa, IPPT.
Gatuingt F., Pijaudier-Cabot G. (2002), Coupled damage and plasticity modeling in transient dynamic analysis of concrete, *International Journal for Numerical Analytical Methods in Geomechanics*, 26, 1 – 24.
Gawęcki A. (1998), *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.
Geers M., Borst R. d., Peerlings R. (2000), Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams, *Engineering Fracture Mechanics*, 65, 247 – 261.
Geers M., de Borst R., Brekelmans W., Peerlings R. (1998), Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160 (1/2), 133 – 154.
Guminiak M., Jankowiak T. (2007), The analysis of internally supported thin plates by the boundary element method. Part 3 – Initial stability analysis, *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 10, 51 – 67.
Henrych J. (1979), *The Dynamics of Explosion and Its Use*, Prague, Academia Prague.
Hibbitt, Karlsson, Sorensen (2005), *ABAQUS User's Manuals and Theory Manual*, Inc. Providence.

Hilleborg A., Modeer M., Petersson P. (1976), Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, 6, 773 – 782.

Hordijk D. (1992), Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete: experiment, modelling and analyses, *HERON*, 37, 3 – 79.

Jamroży Z. (2003), *Beton i jego technologie*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Jankowiak T. (2004), Opis zniszczenia beton wraz z próbą identyfikacji wybranych parametrów konstytutywnych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, 102, 171 –178.

Jankowiak T., Łodygowski T. (2006), Numerical modeling of fracture in brittle material under impact loading, *Vibrations in Physical Systems*, 22, 143 – 148.

Jankowiak T., Łodygowski T. (2007), Cumulative fracture criterion for concrete, w: *17th Int. Conference on Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa.

Jankowiak T., Łodygowski T. (2005), Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model, *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 6, 53 – 69.

Jankowiak T., Łodygowski T. (2005), Numerical analysis of a failure surface for concrete based on micromechanical structure, w: *16th Int. Conference on Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa.

Jankowiak T., Szumigała M. (2006), Comparison of the critical failure surface for I-section steel, I-section steel-concrete composite and reinforced concrete section columns, w: *Progress in Steel, Composite and Aluminum Structure. Proceedings of the XI International Conference on metal structures (ICMS)*, Rzeszów, London, Taylor & Francis.

Jankowiak T., Klepaczko J., Łodygowski T. (2006), Numerical modeling of wave propagation and interaction in bars, *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 7, 187 – 199.

Jankowiak T., Łodygowski T., Klepaczko J. (2007), Failure of materials and structures under impact loadings, w: *APCOM'07 in conjunction with EPMESC XI*, Kyoto, Japan.

Jankowiak T., Łodygowski T., Sielicki P. (2007), Modelling of pressure distribution after explosion, w: *17th Int. Conf. on Computer Methods in Mechanics*, Łódz-Spała.

Jankowiak T., Łodygowski T., Szumigała M. (2004), The experimental and numerical modelling of the steel-concrete column specimen*, w*: *L Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB*, II, Warszawa-Krynica, 205 – 212.

Jankowiak T., Łodygowski T. (2010), Quasi-static failure criteria for concrete, *Archives of Civil Engineering*, 56 (2), 123 – 154.

Jasiczak J., Szymański P. (2006), Modelowanie skurczu betonu o zmiennym W/C I zmiennych warunkach pielęgnacji, *Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej*, 87 (18), 47 – 54.

Jian-Jing J. (1982), *Finite element techniques for static analysis of structures in reinforced concrete*, Goteborg, Chalmers University of Technology, Department of Structural Mechanics.

John R., Antoun T., Rajendran A. (1992), Effect of the strain rate and size on tensile strength of concrete, w: *1991 APS Topcal Conference on Shock Compression of Condensed Materials*, Williamsbourg, VA. Elsevier Sci. Publ., 501 – 504

Kahanov L. (1958), *O vremeni razrušeniâ v usloviah polzučesti*, Izv. Ak. Nauk SSSR, Otd, Tehn. Nauk, 8, 26 – 31.

Kamiński M. (2000), Homogenized properties of periodic n-component composites, *International Journal of Engineering Science*, 4 (38), 405 – 427.

Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. (2003), Determination of the size of representative volume element for random composites: statistical and numerical approach, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 3647 – 3679.

Kinney G., Graham K. (1985), *Explosive shocks in air Berlin*, 2nd ed., Berlin, Springer.

Klepaczko J. (1990), Behavior of rock like materials at high strain rates in compression, *Int. J. Plasticity*, 6, 415 – 432.

Klepaczko J., Brara A. (2001), An experimental method for dynamic tensile of concrete by spalling, *International Journal of Impact Engineering*, 25, 387 – 409.

Klisinski M., Mróz Z. (1988), *Opis niesprężystych deformacji i uszkodzenia betonu*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.

Klósak M., Łodygowski T., Klepaczko J. (2001), Remarks on numerical estimation of the critical velocity in shear, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8, 579 – 593.

Kormeling H. A., Zielinski A. J., Reinhardt H. W. (1980), *Experiments on concrete under single and repeated uniaxial impact tensile loading*, Delft, Stevin Report 5-80-3.

Kupfer H., Hilsdo H., Rusch H. (1969), Behavior of concrete under biaxial stresses, *ACI Journal*, 66, 656 – 666.

Launay P., Gachon H. (1971), Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress, *ACI Spec. Publ.,* 34 (13).

Li Q., Meng H. (2003), About the dynamic strength enhancement of concrete-like materials in split Hopkinson pressure bar test, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 343 – 360.

Li Q., Tong D. (2003), Perforation thickness and ballistic limit of concrete target subjected to rigid projectile impact, *Journal of Eng. Mech.,* 129 (9), 1083 – 1091.

Litoński J. (1977), Plastic flow of a tube under adiabatic torsion, *Biuletyn Polskiej Akademii Nauk*, 25 (1), 1 – 8.

Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. (1989), A Plastic-Damage Model for Concrete, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (3), 229 – 326.

Łodygowski T. (1996), *Theoretical and numerical aspects of plastic strain localization*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.

Łodygowski T., Jankowiak T. (2009), Perforation of concrete and reinforced concrete slabs, w: *Modern repair methods in buildings and constructions*, Wrocław, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.

Łodygowski T., Szumigała M. (1992), Engineering models for numerical analysis of composite bending members, *Mech. Struct. & Mach.,* 20 (3), 363 – 380.

Łodygowski T., Jankowiak T., Sielicki P. (2008), Damage and fracture of concrete and brick walls after explosion, w: *WCCM8 & ECCOMAS5*, Venice, Italy.

Madaj A. (2005), *Doraźna nośność i sztywność na zginanie zespolonych belek stalowo--betonowych*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.

Malvar L., Ross C. (1998), Review of strain rate effects for concrete in tension, *ACI Materials Journal*, 95, 735 – 739.

Malvern L. E., Ross C. A. (1985), *Dynamic response of concrete and concrete structures*, AFOSR contract no. F49620-83-K007.

Melenk J., Babuska I. (1996), The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39, 289 – 314.

Mróz Z. (1972), Mathematical models of inelastic concrete behavior, w: *Inelasticity and Non-linearity in Structural Concrete*, Waterloo, University Waterloo Press, 47 – 72.

Mun-Hong Z., Gjorv O. (1990), Microstructure of the interfacial zone between lightweight aggregate and cement paste, *Cement and Concrete Research*, 4, 610 – 618.

Nagaraj T.S, Banu Z. (1996), Generalization of Abrams' law, *Cement and Concrete Research*, 26, 933 – 942.

Neville A. (2000), *Właściwości betonu*, Kraków, Polski Cement.

Nowacki W., Klepaczko J. (red.) (2001), *New experimental methods in material dynamics and impact*, Warszawa, Centre of Excellence for Advanced Materials, IPPT PAN.

Oluokun F. (1991), Prediction of concrete tensile strength from compressive strength: evaluation of existing relations for normal weight concrete, *ACI Materials Journal*, 3, 302 – 309.

Ostoja-Starzewski M. (1998), Random field models of heterogeneous materials, *International Journal of Solids and Structures*, 35, 2429 – 2455.

Pamin J. (1994), *Gradient-Dependent Plasticity in Numerical Simulation of Localization Phenomena*, Delft, Netherlands, Delft University Press.

Pamin J. (2004), *Gradient-Enhanced Continuum Models: Formulation, Discretization and Applications*, Kraków, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.

Perzyna P. (1966), Fundamentals problems in viscoplasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 9, 243 – 377.

Pęcherski R. B. (2008), Burzyński yeld condition vis-A-vis the related studies reported in the literature, *Engineering Transactions*, 56 (4), 311 – 324.

Pietruszczak S., Mróz Z. (1981), Finite element analysis of deformation of strain softening materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 327 – 334.

Pijaudier-Cabot G., Bažant Z., Tabbara M. (1988), Comparison of various models for strain-softening, *Engineering Computations*, 5, 141 – 150.

Podgórski J. (1984), Limit state condition and the dissipation function for isotropic materials, *Arch. Mech.,* 36 (3), 323 – 342.

Podgórski J., Jonak J. (2004), *Numeryczne badania procesu skrawania skał izotropowych*, Lublin, Lubelskie Towarzystwo Naukowe.

Popovics S. (1998), *Strength and related properties of concrete*, New York, Wiley.

Prager W. (1952), Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Q. Appl. Math.*, 10 (2), 157 – 165.

Prokopski G. (2007), *Mechanika pękania betonów cementowych*, Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej.

Raphael J. (1984), Tensile strength of concrete, *ACI Materials Journal*, 2, 158 – 165.

Rojek J. (2007), *Modelowanie i symulacja komputerowa złożonych zagadnień mechaniki nieliniowej metodami elementów skończonych i dyskretnych*, Warszawa, IPPT PAN.

Romanowski P. (2005), *Analiza numeryczna trwałości elementów konstrukcji betonowych poddanych obciążeniom chemiczno-mechanicznym*, Kraków, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.

Ross C. A., Thompson P. Y., Tedesco J. W. (1989), Split Hopkinson pressure bar tests on concrete and mortar in tension and compression, *ACI Materials Journal*, 86, 475 – 481.

Ross C., Tedesco J., Kuenen S. (1992), Effects of strain rate on concrete strength, *ACI Materials Journal*, 1, 37 – 47.

Rossler M., Odler I. (1985), Inversigations on the relationship between porosity, structure and strength of hydrated portland cement pastes. I. Effect of porosity, *Cement and Concrete Research*, 2, 320 – 330.

Rusinek A. (2000), *Modelisation thermoviscoplastique d'une nuance de tole d'acier aux grandes vitesses de deformation. Etude experimentale et numerique du cisaillement, de la traction et de la perforation*, Metz, University of Metz, France.

Rymarz C. (1993), *Mechanika ośrodków ciągłych*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Santiago S., Hilsdorf H. (1973), Fracture mechanisms of concrete under compressive loads, *Cement and Concrete Research*, 4, 363 – 388.

Schlangen E. (1993), *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete*, Delft, Netherlands, Delft University Press.

Schuler H., Mayrhofer C., Thoma K. (2006), Spall experiments for the measurement of the tensile strength and fracture energy of concrete at high strain rates, *International Journal of Impact Engineering*, 32, 1635 – 1650.

Seweryn A., Mróz Z. (1998), On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states, *International Journal of Solids and Structures*, 35, 1589 – 1616.

Simone A. (2003), *Continous-discontinous modelling of failure*, Delft, Netherlands, Delft University Press.

Simone A., Wells G., Sluys L. (2003), From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 4581 – 4607.

Skalak R. (1957), Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar, *Journal of Applied Mechanics*, 24, 59 – 64.

Smith P., Hetherington J. (1994), *Blast and Ballistic Loading of Structures*, Oxford, Butterworth-Heinemann.

Sobczyk K. (1976), Elastic wave propagation in discrete random media, *Acta Mechanica*, 25, 13 – 28.

Sobczyk K., Kirkner D. (2001), *Stochastic Modelling of Microstructures*, Boston, Birkhauser.

Sobczyk K., Trebicki J., Movchan A. (2007), Characterization of random microstructural stresses and fracture estimation, *European Journal of Mechanics and Solids*, 25.

Stock A., Hannant D., Williams R. (1979), The effect of aggregate concentration upon the strength and modulus of elasticity of concrete, *Mag. Concr. Res.*, 109, 225 – 234.

Stolarski A. (2004), Dynamic strength criterion for concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 1428 – 1435.

Stutzmani P. (2004), Scanning electron microscopy imaging of hydraulic cement microstructure, *Cement and Concrete Composites*, 26, 957 – 966.

Suidan M., Schnobrich W. (1973), Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, *Journal of the Structural Division*, 99 (10), 2109 – 2122.

Swaddiwudhiponga S., Hai-Rong Lub L., Wee T. H. (2003), Direct tension test and tensile strain capacity of concrete at early age, *Cement and Concrete Research*, 33, 2077 – 2084.

Swanson S., Green S. (1973*), Static constitutive relations for concrete*, Kirtland Air Force Base, U.S. Air Force Weapon Laboratory.

Szumigała M. (2007), *Zespolone stalowo-betonowe konstrukcje szkieletowe pod obciążeniem doraźnym*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.

Tedesco J. W., Ross C. A. (1998), A strain-rate-dependent concrete material model for ADINA, *ASME J. Press. Vessel Technol.*, 120, 398 – 405.

Tejchman J., Gudehus G. (2001), Shearing of a narrow granular strip with polar quantities, *J. Num. and Anal. Methods in Geomechanics*, 25, 1 – 18.

Tuler F., Butcher B. (1968), A criterion for the time dependence of dynamic fracture, *Int. J. Fract. Mech.* , 4, 431– 437.

Mises R. von (1913), Mechanik der Festen Korper im plastisch deformablen Zustand, *Nachr. Math. Phys*., I, 582 – 592.

Wang W., Sluys L., de Borst R. (1997), Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 3839 – 3864.

Weerheijma J., Van Doormaalb J. (2007), Tensile failure of concrete at high loading rates: New test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests, *International Journal of Impact Engineering*, 34, 609 – 626.

Willam K., Warnke W. (1975), Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete, *Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc.*, 19, 1-30.

Winnicki A. (2007), *Viscoplastic and internal discontinuity models in analysis of structural concrete*, Kraków, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.

Yan D., Lin G. (2006), Dynamic properties of concrete in direct tension, *Cement and Concrete Research*, 36, 1371 – 1378.

Zielinski A. J. (1982), *Fracture of concrete and mortar under uniaxial impact tensile loading*, Delft, Netherlands, Delft University Press.

Zienkiewicz O., Taylor R. (2005), *The Finite Element Method*, ed. 6, London, Elsevier Butterworth-Heinemann.

Kryteria zniszczenia betonu przy obciążeniach quasi-statycznych i dynamicznych

Streszczenie

W pracy przedstawiono wybrane zagadnienia związane ze zniszczeniem betonu przy obciążeniach quasi-statycznych i dynamicznych. Punktem wyjścia stały się quasi-statyczne mechaniczne właściwości betonu takie jak wytrzymałość przy jednoosiowym ściskaniu, rozciąganiu, w płaskim stanie naprężenia i przekroju południkowym, które zostały skonfrontowane z dynamiczną wytrzymałością betonu w ściskaniu i rozciąganiu. Kolejnym zagadnieniem jest analiza numeryczna mikrostruktury betonu w płaskim stanie naprężenia. Zaprezentowano homogenizację numeryczną, która doprowadziła do określenia właściwości betonu w skali makro (parametry powierzchni zniszczenia Lublinera). Analizowano również wymiary reprezentatywnej objętości w stosunku do wymiarów kruszywa oraz konieczną jakość dyskretyzacji przestrzennej. Wyprowadzono podstawowe równania MES i sposób ich rozwiązywania w quasi-statyce oraz w zagadnieniach obciążeń impulsowych. Jedną z ważniejszych części rozprawy jest analiza wybranych kryteriów zniszczenia, to jest Hubera-Misesa, Druckera-Pragera, Breslera-Pistera, Mroza, Willama-Wernkego, Podgórskiego oraz Burzyńskiego. Zaprezentowano między innymi energetyczną interpretację wymienionych kryteriów, która służy do ich porównania. Przeprowadzono analizę związku konstytutywnego betonu plastycznego ze zniszczeniem wraz z identyfikacją i interpretacją jego parametrów konstytutywnych. Omawiany model betonu został użyty i zweryfikowany przy opisie materiału w trzech problemach brzegowych a mianowicie w czteropunktowym zginaniu (symetrycznym i asymetrycznym) belki betonowej z nacięciem oraz czteropunktowym zginaniu ściskanego słupa zespolonego. Omawiano problem regularyzacji zjawiska osłabienia betonu, za pomocą energii pękania, która zapobiega patologicznej zależności od gęstości dyskretyzacji. Druga grupa zagadnień dotyczy dynamicznego zniszczenia betonu. Zaprezentowano koncepcję multiplikatywnego kryterium zniszczenia oraz kumulatywnego kryterium zniszczenia. Opisano wpływ parametrów konstytutywnych na określenie czasu do zniszczenia. Zaproponowano metodę uogólnienia kumulatywnego kryterium zniszczenia na przypadek trójwymiarowy. Zweryfikowano model materiału sprężystego z kryterium zniszczenia zależnym od prędkości odkształceń za pomocą testów laboratoryjnych z użyciem pręta Hopkinsona i okrągłej płyty betonowej obciążonej eksplozją materiału wybuchowego. Ostatnia aplikacja stanowi numeryczną weryfikację wpływu kąta padania pocisku perforującego kwadratową płytę betonową i żelbetową. Przedstawiono istotny dla projektantów aspekt projektowania zbrojenia betonu na przebicie pociskiem. Zaprezentowano dynamiczne zachowanie płyty betonowej oraz żelbetowej przebijanej sztywnym pociskiem.

Failure criteria for concrete under quasi-static and dynamic loadings (extended abstract)

Introduction and motivation

The numerical methods are essential elements in design of structures, particularly for unique loadings. To predict real behavior of a structure subjected to the unique loadings, the using of failure criteria for concrete is required. The unique loadings (blast or impact) are destructive for the whole structure (load capacity decreasing) or for a part of structure (damage). The simulations of mechanical processes in concrete structures are divided into two principal types: first it is applied to quasi-static loadings and the second concerns with the dynamic loadings. The both types of simulations are considered in PhD thesis in details.

1. Selected properties of concrete

The compressive strength of concrete gives the general information on the quality of internal microstructure. The real tensile strength is considerably lower than theoretical strength based on molecular cohesion and surface energy of perfect homogenous body. This real strength reaches 10.5 GPa (Neville 2000) and mainly depends on the cohesion of aggregates and hardened cement paste. The tests of concrete strength in plane stress conditions are also important and discussed in details. In figure 1.1 (page 12) the uniaxial behavior of concrete in compression and in tension is presented. The important is also fig. 1.5 (page 15), where the Kupfer curves for three classes of concrete are shown. The important are also the methods of concrete behavior testing which are presented in chapter 1.
The strain rate has fundamental influence on the concrete strength (Abrams 1917). The new experimental results prove these properties (Klepaczko, Brara 2001 and Bischoff, Perry 1991). In figure 1.7 (page 17) the general trend that the dynamic strength of concrete in compression is significantly growing together with increasing strain rates. The similar phenomena is also true for dynamic tensile strength of concrete and it is presented in fig. 1.9 (page 19). In cases of tension Dynamic Increase Factor (*DIF*) is even higher than in compression (*CIF*).

2. The finite element method

The finite element method is used as the basic method for numerical simulations of mechanical processes. In all quasi-static simulations, the Newton-Raphson method is used to find the static equilibrium of the structures. The dynamic simulations are performed using the explicit integration of equations of motion. The basic equations for both methods are derived and presented in this part of dissertation.

3. Micromechanical analysis

The concrete is an example of composite material (Klisiński, Mróz 1988) without the symptoms of periodicity (Kamiński 2000). In concrete the aggregate fulfils the role of inclusions immersed in hardened cement paste (hydrated cement), which is a filling (matrix). The interface surrounds the aggregate immersed in hardened mortar. The typical intermediate layer has thickness of order 10-30 μm (Neville 2000). The elements which increase the heterogeneity are the air voids, which occur in small quantity about 2% of the volume. The homogenization describes the behavior of the concrete in macro scale based on known properties in micro scale.

The two methods of sampling were introduced: a uniform distribution sampling and a determined distribution sampling. Both methods were used to describe the size of the Representative Volume Element (RVE) in comparison with the largest aggregate size and the mesh density used for RVE. The idea of random sampling and distribution of phase is presented in fig. 3.10 (page 44). The figure presents the typical concrete and the two distributions, which takes advantage of both methods of sampling.

The shape of the failure surface of RVE in plane stress conditions with stochastic distributed fractions is analyzed. The constitutive parameters of fractions are presented in Tab. 3.3 (page 45) and the failure surfaces for two methods of sampling are plotted in fig. 3.11 (page 45).

4. Quasi-static failure criteria

The strength of concrete depends on the stress state, which exists in material (proportion between tension, compression and shear). It should take into consideration the interaction of constituents of stress tensor. In the dissertation the selected failure criteria are presented in details (Bresler, Pister 1958; Klisinski, Mróz 1988; Chen 1982; Lubliner, Oliver, Oller, Oñate 1989 oraz Podgórski 1984). The Figs A1-A3 present the selected criteria in the plane stress conditions, in the meridian plane and in the energy space $W_2 - W_1$. There are also marked the green-square signs, which represent the identification points.

The description of concrete damage plasticity model with identification and interpretation of constitutive parameters is also contained in this chapter. The proper description of concrete failure is important, particularly in advanced state of deformations. In the concrete, the softening of material appears as a result of existing micro-cracks evolution. This effects, on the ground of continuum mechanics is called damage, that the stiffness matrix of the system is not positively defined. This problem appears in concrete during tension, while proceed the localization of deformation phenomena. From the mathematical point of view, the type of governing equations changes (from elliptical to hyperbolic) and the problem loses its well-posedness. In consequence, the solution depends on the discretiation in pathological way (Pietruszczak, Mróz, 1981). This problem can be regularized by different methods.

The several numerical examples were computed. First, the symmetric four point bending of the concrete notched beam with different lengths of notch is studied. The numerical results are compared and verified by known experiments. These results are in good

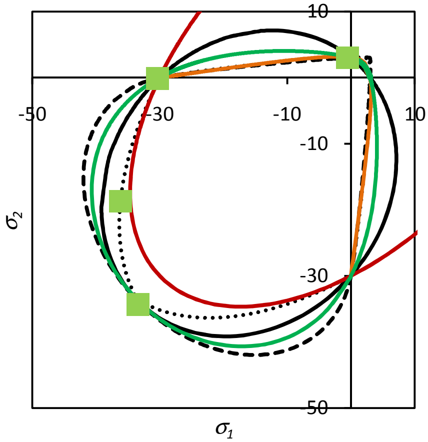


Fig. A.1 Plane stress conditions

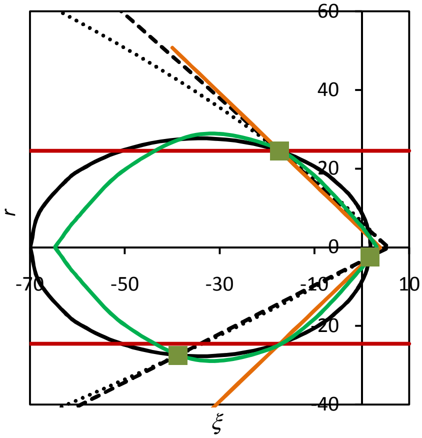


Fig. A.2 Meridian plane

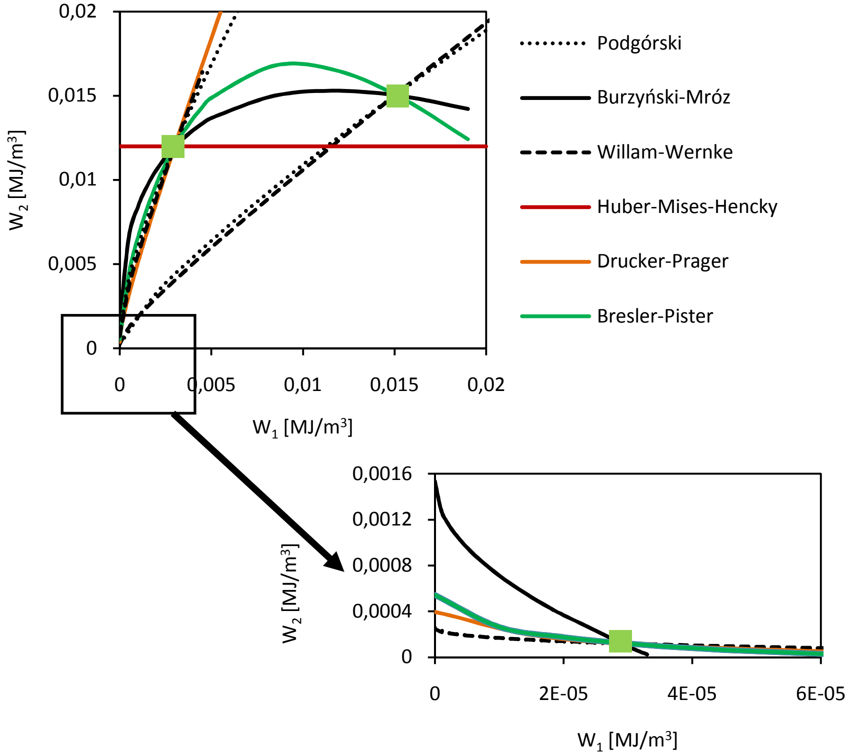


Fig. A.3 Energetic comparison of failure criteria agreement. The second example is asymmetric four points bending of the concrete notched beam. The influence of the cracking energy on the capacity and post-critical behavior of the concrete beam and the mesh sensitivity of the numerical results for fixed numerical parameters are analyzed. The last numerical example focus on the analysis of the four points bending of the compressive composite steel-concrete column. The results are compared with experiment. The influences of shrinkage in concrete and welding stresses in steel profiles are taken into account.

5. Dynamic failure criteria

The second important set of problems considers dynamic failure of concrete. The ideas of multiplicative failure criterion and cumulative failure criterion (CFD) are shown. The CFD describes influence of constitutive parameters on the definition of time up to failure. The method of generalization of this criterion to three-dimensional cases is also proposed. The verification of the elastic material model with the strain rate dependent failure criterion that based on two tests (spalling of concrete specimen in Hopkinson pressure bar and circular concrete slab subjected to TNT explosion) is carefully discussed. The last application describes numerically the dynamic behavior of concrete and reinforced concrete slab perforated by projectiles. The influence of incidence angle of the rigid projectile on energy absorption stored in the impacted and perforated slab is studied. The important aspect of the design of reinforcement of concrete against the perforation is discussed.

Summary

The import achievements included in the dissertation are:

- The presentation of two methods of sampling of the concrete structures (uniform and determined) which are used for description of the density discretization and the size of representative volume element in comparison with the dimensions of the largest aggregate
- The using of numerical homogenization for description of constitutive parameters of heterogeneous concrete structure, which then are used in computations of selected concrete structures (concrete beams and others)
- The presentation of selected quasi-static failure criteria and the method of identification of constitutive parameters based on required number of identification points
- The presentation of all failure criteria in cuts: meridian, deviatoric and in plane stress conditions. The influence of following parameters is shown
- The energetic interpretation of discussed criteria is shown. The influence of volume change strain energy on the strain energy of distortion is presented in comparison with the idea of Burzyński (1928)
- The concrete damage plasticity model was presented in details with description and interpretation of the parameters
- The reliable results were obtained for concrete structure and for composite concrete-steel column. Those results were confirm experimentally

- The presentation of generalization of the cumulative fracture criterion to the three dimensional case based on equivalent stress measure and the discussion of constitutive parameters influence on the description of the time to failure
- The presentation of reliable dynamic results for cumulative fracture criterion (spalling process in concrete specimen in SPHB and in circular slab loaded by explosion of TNT)

The future work will focus on using the failure criteria to safety assessment of existing and designed concrete structures.